

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Aspects heuristiques	3
1.2	Sur la notion de réponse impulsionnelle	6
1.2.1	En l'absence de turbulence	6
1.2.2	En présence de turbulence	7
1.3	L'interférométrie des tavelures	10
1.4	Quelques méthodes d'imagerie	12
1.4.1	L'holographie des tavelures	13
1.4.2	Estimation de la phase de l'objet à partir du module	14
1.4.3	le "Shift-and-Add"	14
1.4.4	La méthode de Knox et Thompson	14
1.4.5	Le "Speckle Masking" ou opérateur de Weigelt	15
2	L'imagerie probabiliste — Statistique de l'intensité au plan focal à fort flux	17
2.1	Historique	17
2.2	Illustration du processus d'imagerie d'une étoile double	19
2.3	Quelques définitions et rappels sur les fonctions statistiques	22
2.3.1	Densité de probabilité	22
2.3.2	Fonction caractéristique — Fonction génératrice des moments	23
2.3.3	Moments et cumulants	23
2.4	Le phénomène speckle décrit comme une marche aléatoire bidimensionnelle — Le modèle Gaussien	24
2.4.1	Statistique au deuxième ordre pour un point source	26
2.4.2	Cas d'une étoile double — Superposition de deux champs de speckles	29
2.4.3	Cas d'un objet étendu	31
	Article 1 : " <i>Probability Imaging: the statistics of speckle patterns of extended astronomical sources at high light level</i> "	33
2.4.4	Analyse au deuxième ordre de systèmes multiples — Etoile triple sur l'axe	43
2.5	Vers la reconstruction des images	44
2.5.1	Relation entre la statistique d'un objet étendu et celle de sa réponse impulsionnelle	44
	Article 2 : " <i>Imagerie Probabiliste: Sur l'Ordre d'Analyse d'une Structure de Speckles en Astronomie à Haute Résolution Angulaire</i> "	47
2.5.2	Une application au cas de ζ Aqr	67
2.5.3	Méthode possible de reconstruction des images	69

2.5.4	Etude de la fonction distance dans le cas d'une étoile double	73
3	Influence du bruit — Détection en comptage de photons	91
3.1	Cas du bruit additif	91
	Article 3 : “ <i>Application of the Richardson-Lucy algorithm to the deconvolution of two-fold Probability Density Function</i> ”	93
3.2	Détection des images en comptage de photons	122
	Communication 1 : “ <i>Probability Imaging of Extended Astronomical Sources at Low Light Levels</i> ”	123
	Communication 2 : “ <i>Probability imaging photon counting levels</i> ”	131
3.2.1	Influence du biais dû à la statistique des photons et problèmes de capteur	143
	Communication 3 : “ <i>Second order statistics of astronomical speckle pattern used for image reconstruction</i> ”	145
	Communication 4 : “ <i>Effects of Clipped Photon Detection in Speckle Interferometry</i> ”	159
	Article 4 : “ <i>The effects of clipped photon detection in Labeyrie’s speckle interferometry technique</i> ”	167
	Communication 5 : “ <i>Effects of clipped photon detection in the triple correlation technique</i> ”	189
	Article 5 : “ <i>A statistical approach to bias effects in the techniques of speckle interferometry and speckle masking</i> ”	201
4	Une application astrophysique sur des images tavelées de quelques étoiles doubles	235
4.1	Les observations	235
4.2	Examen des densités de probabilité au premier ordre	236
	4.2.1 L'étoile de référence	236
	4.2.2 Les étoiles doubles	239
4.3	Examen étoile par étoile	239
	Conclusion et perspectives	251
	Annexe I	256
	Annexe II	266

Remerciements

Voilà maintenant près de deux ans et demi que j'ai commencé ce travail de thèse dont vous avez le résumé sous les yeux. Il s'est déroulé entièrement au sein du Département d'Astrophysique de l'Université de Nice–Sophia Antipolis, U.R.A. 709 du C.N.R.S., sous la direction du Professeur Claude Aime. Je voudrais signaler ici la qualité de l'accueil qui m'a été fait tant au sein de l'équipe "Imagerie Probabiliste" que du laboratoire tout entier. L'ambiance y est sérieuse et sympathique, le cadre est superbe puisque la Faculté des Sciences est installée dans le parc du château de Valrose. Et il n'est pas désagréable de travailler sous le soleil de la Côte d'Azur.

Mais si ce travail s'est déroulé dans d'excellentes conditions, je le dois aussi à tout un ensemble de personnes qui m'ont aidé à divers degrés tant par leur compétence que par leur soutien technique et moral. Que toutes ces personnes soient remerciées ici, et notamment :

- Monsieur Claude Aime, mon Chef vénéré et néanmoins collègue, maître incontesté de notre équipe. Claude Aime est un homme qui a percé une bonne partie des secrets de l'Univers et qui est passé maître dans l'art d'utiliser la plaisanterie pour les choses de la vie quotidienne. Ses qualités humaines, sa compétence et son sens de la pédagogie en font le directeur de thèse idéal.
- Monsieur Antoine Labeyrie, père de l'interférométrie des tavelures, qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être président de mon Jury de thèse.
- Messieurs Daniel Bonneau et André Lannes, mes rapporteurs, pour l'excellent travail qu'ils ont fait. J'espère que mon manuscrit les a intéressés.
- Messieurs Julien Borgnino, Christian Perrier et François Rocca qui ont accepté d'être membres du Jury.
- Monsieur Gilbert Ricort, Niçois dans l'âme et dans le comportement, pour l'aide particulièrement efficace qu'il m'a fourni dans le domaine de la recherche, de l'enseignement et de l'administration. Ses petits coups de pouce se sont avérés précieux.
- Monsieur Henri Lantéri pour sa gentillesse, sa disponibilité et son dévouement, le tout arrosé d'un humour qui n'appartient qu'à lui. Son esprit de synthèse allié à une démarche rigoureuse et des connaissances encyclopédiques sur tout ce qui touche aux problèmes inverses en font une référence solide auprès de laquelle on peut trouver la solution d'à peu près tout les problèmes qu'il est possible d'imaginer.
- Monsieur Steve Jobs pour avoir été à l'origine de ces merveilleuses machines que sont les stations de travail Next

- Messieurs Bernard Gelly, Richard Manas et Patrick Bury, tous virtuoses du clavier QWERTY et auprès de qui j'ai souvent trouvé de l'aide quand j'avais des problèmes en informatique.
- Mes amis astronomes amateurs du club astro de Chamonix, de NOVAE, de l'ANSTJ et de l'AFA pour les bons moments que nous avons passé ensemble dans les soirées, les stages, les campagnes et autres camps de vacances. Il est parmi eux un ami que je voulais tout particulièrement remercier ici ; il s'agit de Pierre Terrier, grand astronome devant l'éternel auprès de qui j'ai appris énormément de choses et qui fut le compagnon de la majeure partie de mes soirées d'observations lorsque j'étais adolescent.
- L'équipe des jeunes étudiants du laboratoire, à savoir Messieurs Stéphane Lagarde, Aziz Ziad, Selma Ennabli, Karim Agabi, Said Loudagh, Leonardo Sanchez, Freidoum Sultani et Vincent Planat pour l'ambiance conviviale qui régnait entre nous et pour les diverses sorties et soirées que nous avons passé ensemble.
- Messieurs Stéphane Lagarde, Salvador Marquis de Cuevas, Jean Vernin et Serge Meinardi qui se reconnaîtront dans cette phrase empruntée à la langue allemande : "Ein Zwei, Zufer"
- Monsieur Jean Vernin, Directeur du département, pour le bon goût dont il fait preuve dans le choix de ses secrétaires.

じゅんじおつぼん ちまたは写真の二箇のほしをあげりました。
 ちりがとこまにます。ちたしはせこころに
 写真の二箇のほしはテクニクのペロバビリスックをつおいた。

- Monsieur Hamid Touma pour nos discussions fructueuses, les bonnes relations que nous avons eu et les petits coups de main qu'il m'a donné, tant en France qu'au Maroc où il a su me faire apprécier certaines spécialités gastronomiques que je ne suis pas près d'oublier...
- Messieurs Sébastien Gruhier et Stéphane Dupont, étudiants à l'Ecole Supérieure des Sciences Informatiques pour la qualité du travail qu'ils ont effectué au sein de notre équipe. La motivation dont ils ont fait preuve et leur acharnement au travail méritent une mention particulière. Je leur souhaite de réussir dans la vie après l'obtention de leur diplôme d'ingénieur.
- Messieurs Romain Petrov, François Martin et Toufik Abdellatif pour les discussions que nous avons eu et pour les suggestions qu'il m'a faites tout au long de ce travail.
- Et enfin, madame Janine Koskas, notre Mère à tous, de qui Lamartine aurait dit "Plonge-toi dans son sein qu'elle t'ouvre toujours" et sans qui le laboratoire ne serait pas ce qu'il est.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Aspects heuristiques

Tous les livres d'astronomie le disent : l'image d'une étoile dans une petite lunette est une tache circulaire entourée d'anneaux ; cette figure est appelée *tache d'Airy* et sa taille est inversement proportionnelle au diamètre de l'objectif. Son existence conditionne le pouvoir séparateur de l'instrument à une valeur proche du diamètre de la tache :

$$\text{p.s. en secondes d'arc} = \frac{120}{\text{Diamètre en mm}}$$

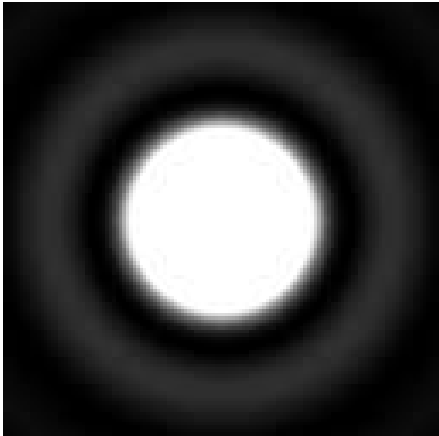
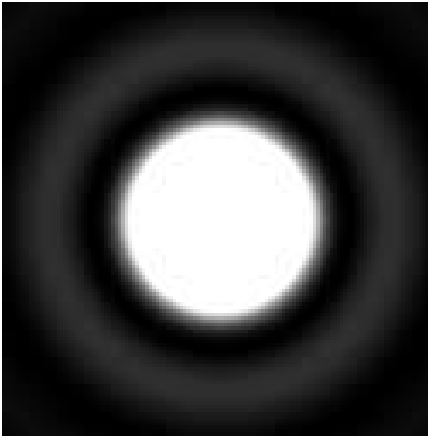
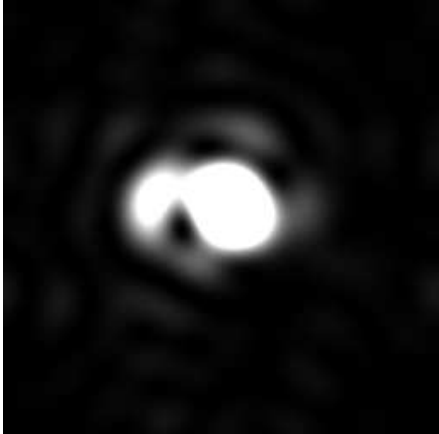
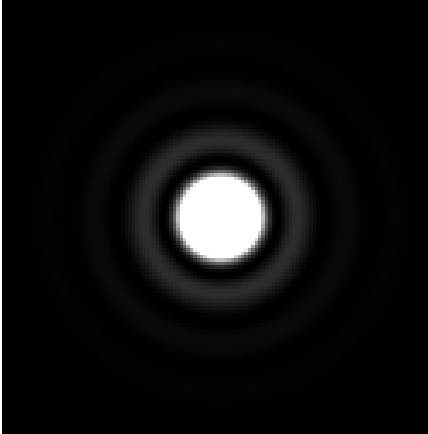
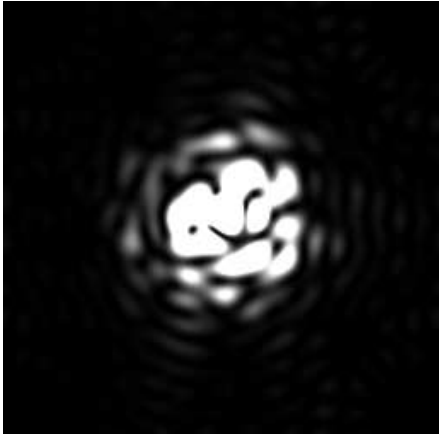
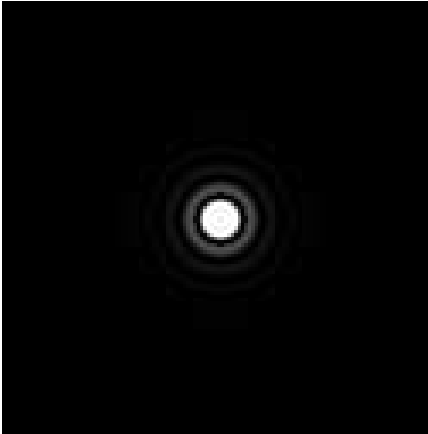
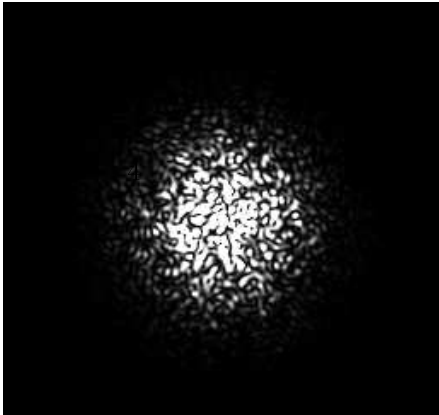
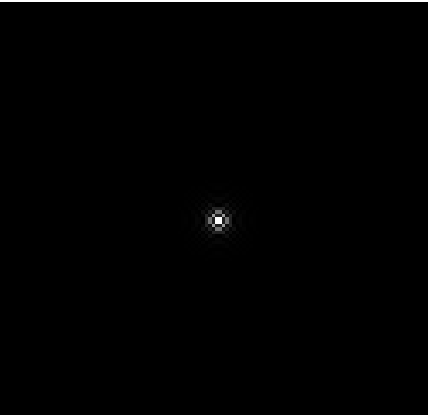
si la longueur d'onde est voisine du maximum de sensibilité de l'œil humain, soit vers 5000 Å. Ainsi on peut séparer à l'œil nu des détails voisins de la minute d'arc (soit une pièce de 10 centimes vue à 70 mètres). Une lunette de 120 mm de diamètre résout la seconde d'arc et permet d'apprécier le caractère circulaire des satellites de Jupiter, tandis que le Soleil est résolu depuis la Terre avec un instrument de 70 microns.

Observons une étoile à travers une petite lunette, par exemple de 50 mm : avec un oculaire fort, on distingue très bien la tache d'Airy entourée d'anneaux complets dont la brillance diminue quand on s'éloigne du centre. Mais cette image n'est pas fixe : elle est le siège d'une agitation qui la fait se mouvoir lentement dans le champ, trahissant la présence de turbulences dans les masses d'air traversées par la lumière de l'étoile.

Prenons maintenant un télescope un peu plus grand, par exemple 12 centimètres : la figure d'Airy est toujours visible quoique plus petite que la précédente, mais elle semble parcourue par de légers tremblement rapides qui brisent et font danser les anneaux.

A partir de 20 centimètres, l'image prend un aspect planétaire et se fragmente en plusieurs morceaux. L'agitation est vive et l'image explose parfois jusqu'à un diamètre de dix secondes. Les anneaux de diffraction ont complètement disparu sauf pendant les brefs instants où l'atmosphère redevient calme (trous de turbulence).

Dans un télescope de 50 centimètres et plus, l'image devient un épouvantable bouillonnement de petits grumeaux de lumière (couramment appelés *speckles* ou *tavelures*) qui s'agitent constamment dans une zone de plusieurs secondes d'arc. On observe là un véritable plateau d'intensité dont l'étendue ne dépend que du degré de turbulence atmosphérique. Une description très réaliste de cette figure a été donnée par Jean Texereau [75] dans son ouvrage sur la fabrication des miroirs, et par Danjon et Couder [35].

Diamètre de l'instrument	Avec turbulence moyenne (10 cm)	Sans turbulence
<i>5 centimètres</i>		
<i>12 centimètres</i>		
<i>30 centimètres</i>		
<i>120 centimètres</i>		

COTE	t	DESCRIPTION (voir fig. 149)
V	$t < 0,25 \rho$	Images parfaites, sans déformation sensible et à peine agitées.
IV	$t = 0,25 \rho$	Anneaux complets, parcourus par des condensations mobiles.
III	$t = 0,5 \rho$	Agitation moyenne, anneaux de diffraction brisés, tache centrale à bords ondulants.
II	$t = \rho$	Agitation vive, anneaux évanouissants ou absents.
I	$t > 1,5 \rho$	Image tendant vers l'aspect planétaire.

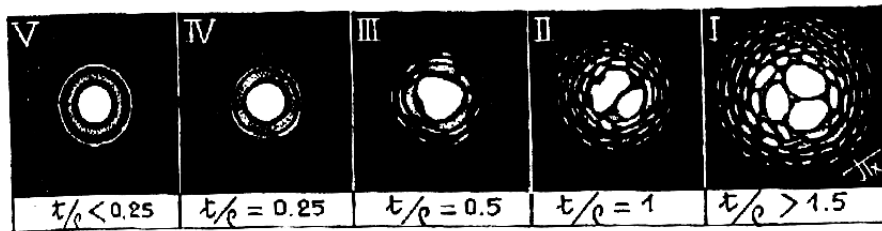


FIG. 1.2 – *Reproduction de l'échelle à cinq niveaux qui était utilisée par les observateurs pour estimer la turbulence en fonction de la taille de leur instrument (d'après "La construction du télescope d'amateur" — SAF).*

C'est la turbulence qui limite en définitive la résolution des télescopes observant à travers l'atmosphère. Les observateurs avaient l'habitude de la classer sur une échelle à cinq degrés suivant la qualité des images qu'ils observaient dans un télescope donné ; cette échelle reproduite en figure 1.2 a été remplacée par un concept plus moderne de *télescope équivalent*. C'est celui qui donnerait une tache d'Airy d'une taille égale à l'étalement produit par la turbulence. Le diamètre de ce télescope équivalent est généralement compris entre 5 et 20 centimètres limitant la résolution à une valeur proche de la seconde d'arc. On pourra alors noter que le télescope géant du Mont Palomar n'est guère meilleur qu'un petit 115/900 du commerce du point de vue de la résolution... Il m'a été donné d'observer le trapèze d'Orion dans un télescope d'un mètre de diamètre par forte turbulence : les images sont très empâtées, les étoiles sont très élargies et les fins détails disparaissent. L'image est lumineuse mais floue, et les étoiles les plus faibles s'évanouissent. Par contre lorsque la turbulence est moins mauvaise, ce qui arrive parfois, les images du grand télescope sont infiniment plus riches et plus détaillées que celles d'un petit. Et il est certain qu'en l'absence totale de turbulence (c'est à dire dans l'espace) la tache d'Airy serait observée *quel que soit le diamètre de l'instrument*.

Dans l'espace la turbulence n'existe pas. Les étoiles sont fixes et paraissent plus éclatantes, n'étant pas affaiblies par l'atmosphère ; témoins les multiples témoignages des cosmonautes qui ont eu le privilège d'observer "là-haut". Un télescope dans l'espace donne la pleine mesure de son potentiel collecteur et résolveur. D'où l'idée d'envoyer un grand télescope automatique en orbite : c'est le projet "Hubble Space Telescope" qui prit nais-

sance au début des années 60. Mais les missions spatiales coûtent cher et la maintenance des satellites est difficile. Par exemple le télescope spatial ne sera équipé d'une optique correctrice que vers 1994, soit quatre ans après son lancement. Sur Terre, l'anomalie aurait pu être réparée beaucoup plus vite et à moindres frais.

C'est au début des années 1970 que naquit l'espoir de réaliser des images à haute résolution depuis la Terre ou tout au moins de récupérer une partie de l'information détruite par la turbulence. Les observateurs d'étoiles doubles serrées avaient déjà remarqué que l'image d'une binaire était simplement la superposition de deux images speckles décalées de la séparation des étoiles. Avec un peu d'entraînement, ils arrivaient à mesurer des couples distants de $0''3$ [75]. Parallèlement les progrès de l'optique cohérente et les expériences de diffusion de lumière laser dans des milieux inhomogènes avaient montré la présence de speckles dans la lumière diffractée [33]. Antoine Labeyrie en 1970 montra que les granules présents dans les images d'étoiles étaient de même nature que les speckles laser, à ceci près que les speckles astronomiques se renouvellent toutes les 10 millisecondes environ sous l'effet des fluctuations thermiques de l'atmosphère [50]. Au Mont-Palomar, il prit des clichés instantanés d'étoiles simples, doubles et géantes théoriquement résolues par le télescope : l'analyse de ces clichés permit d'observer des détails à la résolution théorique de l'instrument (25 millisecondes d'arc) [51].

1.2 Sur la notion de réponse impulsionnelle

1.2.1 En l'absence de turbulence

Considérons un objet émetteur de lumière possédant une répartition d'intensité $O(x, y)$ en fonction de la position angulaire (x, y) . Lorsqu'une image est faite de cet objet par un télescope ou un système quelconque, les propriétés d'addition linéaire des intensités en éclairage incohérent permettent d'écrire l'intensité reçue en un point (x', y') du plan focal :

$$I(x', y') = \int O(x, y) S(x, y; x', y') dx dy \quad (1.1)$$

où $S(x, y; x', y')$ est une fonction qui dépend du télescope et qui exprime l'étalement de chaque point de l'objet dans l'image.

Si le système est invariant par translation, S ne dépend que de $x - x'$ et de $y - y'$. La relation ci-dessus se ramène à une simple convolution :

$$I(x', y') = \int O(x, y) S(x - x', y - y') dx dy \quad (1.2)$$

$$\boxed{I = O * S}$$

Si l'objet observé est une étoile ponctuelle assimilable à un pic de Dirac, l'image observée est $I = S$. On appelle S la *réponse impulsionnelle* de l'instrument. Dans l'approximation de la diffraction de Fraunhofer, S est simplement donnée par le carré du module de la transformée de Fourier de l'amplitude complexe sur la pupille de l'instrument [43]. Dans un télescope circulaire de diamètre D , c'est la fameuse tache d'Airy :

$$S(\rho) = \left| 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda}\right)} \right|^2 \quad (1.3)$$

Log fonction de transfert

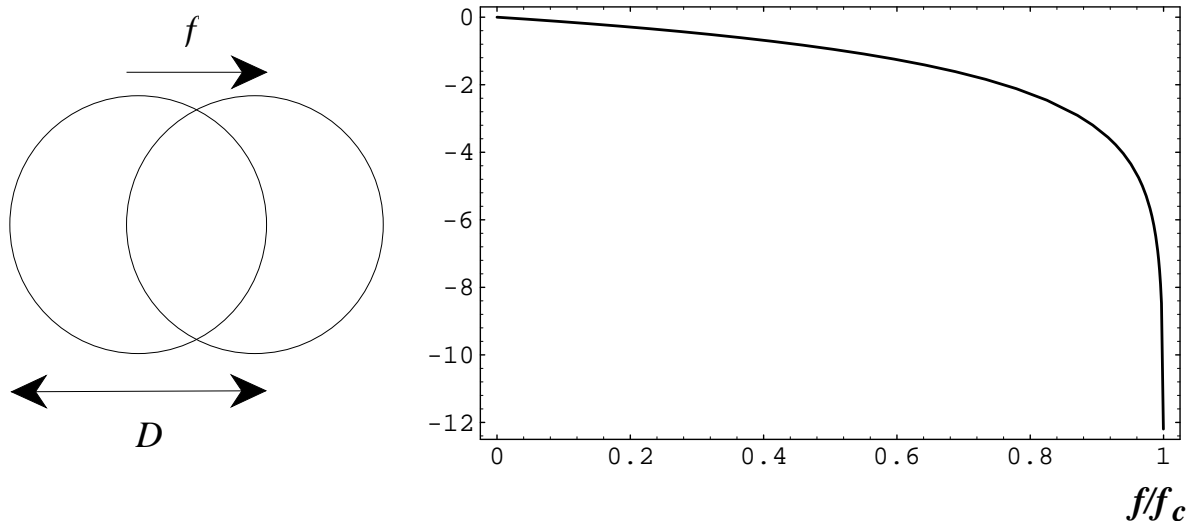


FIG. 1.3 – *Fonction de transfert d'une pupille circulaire: elle mesure l'importance avec laquelle une fréquence spatiale f est transmise à l'image. Elle est égale au recouvrement des aires de deux pupilles décalées d'une quantité f . Elle s'annule pour les valeurs supérieures à λ/D : on parle de fréquence de coupure du télescope.*

La transformée de Fourier de la fonction S est la *fonction de transfert* de l'instrument et mesure le degré de redondance de chaque fréquence spatiale dans l'image. Elle est donnée par l'autocorrélation de la pupille, c'est à dire la surface de recouvrement de deux pupilles identiques décalées d'une quantité f . Pour un télescope circulaire de diamètre D la fonction de transfert est égale à [43]:

$$T(f) = \frac{2}{\pi} \left(\arccos \left(\frac{f}{D} \right) - \frac{f}{D} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{D} \right)^2} \right) \quad (1.4)$$

Son graphe est représenté en figure 1.3. Cette fonction s'annule au point $f = D/\lambda$; par conséquent le télescope ne permet pas de percevoir des détails inférieurs à λ/D : c'est le fameux pouvoir séparateur dont nous avons déjà parlé. C'est par exemple à cause de lui que nous ne voyons pas la structure atomique des objets.

1.2.2 En présence de turbulence

L'atmosphère de la Terre est le siège de mouvements de masses d'air chaud et froid provoqués par des gradients de pression qui apparaissent pour différentes raisons (relief, différences de température, accélération de Coriolis, etc. . .). Ces variations de température et de pression influent sur l'indice de réfraction de l'air qui devient une fonction aléatoire du temps et de la position. La théorie générale de la propagation en milieu turbulent a été élaborée par Tatarsky [74] et Chernov [30] dans les années 60. Des revues plus accessibles se trouvent dans [55, 68]; on peut mentionner aussi un article récent de Mac Kechnie [58] qui fait une bonne synthèse des propriétés statistiques de formation des images par un télescope à travers la turbulence.

Réponse impulsionnelle instantanée

Considérons la lumière qui vient d'une étoile à l'infini. Pour une lumière parfaitement monochromatique, le front d'onde est plan et la phase de l'amplitude complexe ne dépend que de l'altitude z mesurée à partir du sol. A la traversée d'une couche turbulente l'onde voit sa vitesse varier comme l'inverse de $n(r, t)$ si n est l'indice de réfraction pour une position r du plan de la couche et à l'instant t . A son arrivée au sol l'onde possède une phase aléatoire fonction du temps et de la direction d'observation. La réponse impulsionnelle d'un télescope observant une telle onde est toujours le carré du module de l'amplitude complexe découpée par la pupille, mais elle est ici *aléatoire*. Elle se renouvelle à peu près tous les centièmes de secondes et présente l'aspect granuleux décrit au chapitre précédent. Elle montre en fait une structure à deux niveaux :

- des grains brillants de taille λ/D dus à des phénomènes d'interférences constructives sur la pupille du télescope de diamètre D (les speckles),
- une enveloppe de taille λ/r_0 caractérisant la cohérence spatiale du front d'onde (la valeur r_0 est la taille des zones de cohérence et est appelée *paramètre de Fried* qui l'a introduit en 1966 [39]). Cette enveloppe qui contient les speckles caractérise l'intensité de la turbulence. Le nombre de speckles qu'elle contient est de l'ordre du rapport des surfaces $(D/r_0)^2$.

La transformée de Fourier de cette figure est la fonction de transfert instantanée de l'ensemble atmosphère + télescope. C'est une fonction aléatoire qui présente deux régions bien différenciées [22, 68]:

- une zone basse fréquence qui va en décroissant de la fréquence zéro à la fréquence r_0/λ qu'on appelle fréquence de coupure atmosphérique,
- une aile haute fréquence très perturbée jusqu'à D/λ et qui présente un rapport signal sur bruit voisin de l'unité.

La fonction de transfert instantanée contient de l'information jusqu'à la fréquence de coupure du télescope (on le voit très bien sur la figure 1.4) et c'est ce qui rend possible la restauration des images dégradées par la turbulence. En moyennant les modules de ces fonctions de transfert instantanées, on améliore le rapport signal sur bruit de l'aile haute fréquence. Celle-ci reste néanmoins affaiblie par rapport à la courbe idéale d'un facteur égal au nombre de speckles, d'autant plus fort que la turbulence est plus grande. Les éventuelles reconstructions d'image seront donc plus difficiles par forte dégradation, ce qui n'est pas très surprenant.

L'angle d'isoplanétisme

La lumière issue de deux objets vus sous un angle inférieur à l'angle d'isoplanétisme traverse la même atmosphère. A l'intérieur d'une telle région la réponse impulsionnelle télescope + atmosphère est constante et l'on peut appliquer la relation de convolution objet-image, base de toutes les méthodes de reconstruction existantes. Cet angle d'isoplanétisme est généralement de l'ordre d'une à quelques secondes d'arc. Il est d'autant plus grand que la turbulence se produit près du sol.

L'effet du non-isoplanétisme intervient pour des objets plus étendus ; il a été décrit par Roddier [70] comme un effet de filtrage de la fonction de transfert pouvant conduire

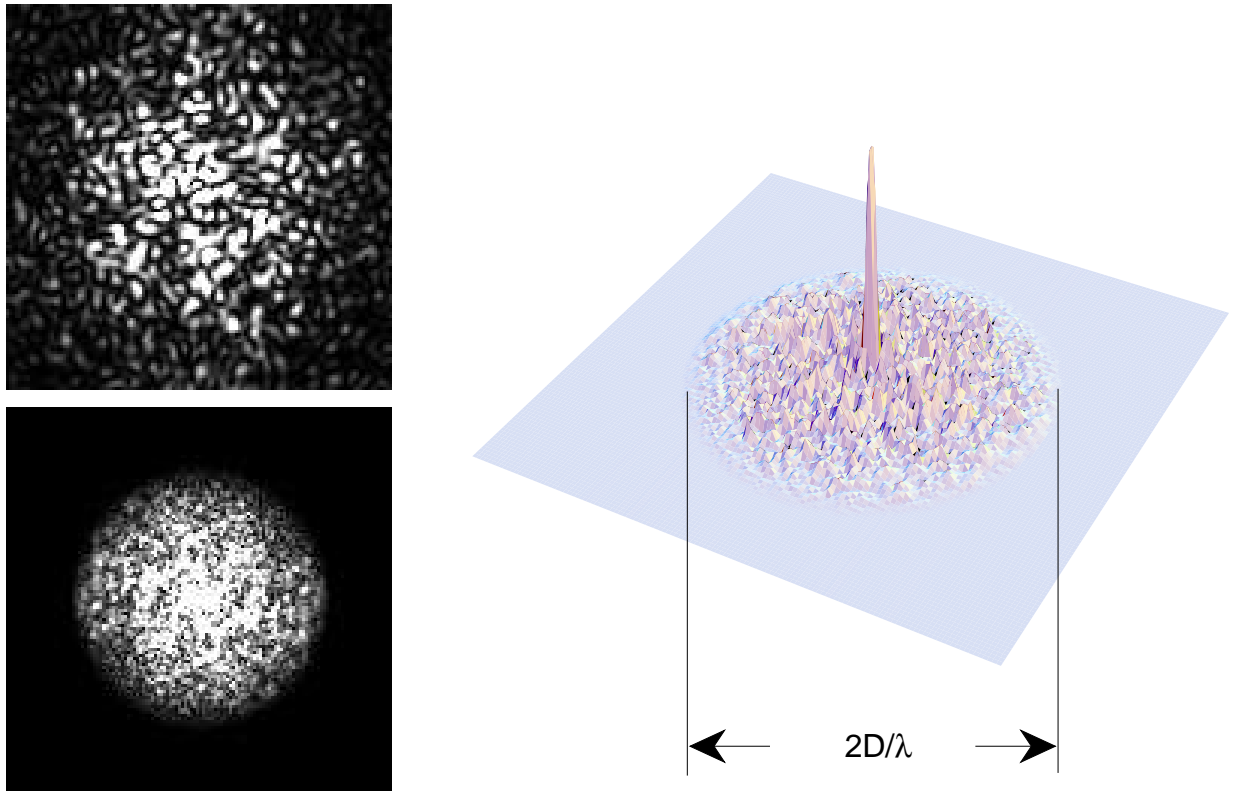


FIG. 1.4 – Image de speckles (réponse impulsionnelle) en haut à gauche. En bas à gauche et à droite, le module de sa transformée de Fourier qui n'est autre que la fonction de transfert instantanée de l'ensemble télescope+atmosphère. Cette fonction est contenue dans une zone circulaire de rayon D/λ et transmet donc de l'information jusqu'à la fréquence de coupure du télescope.

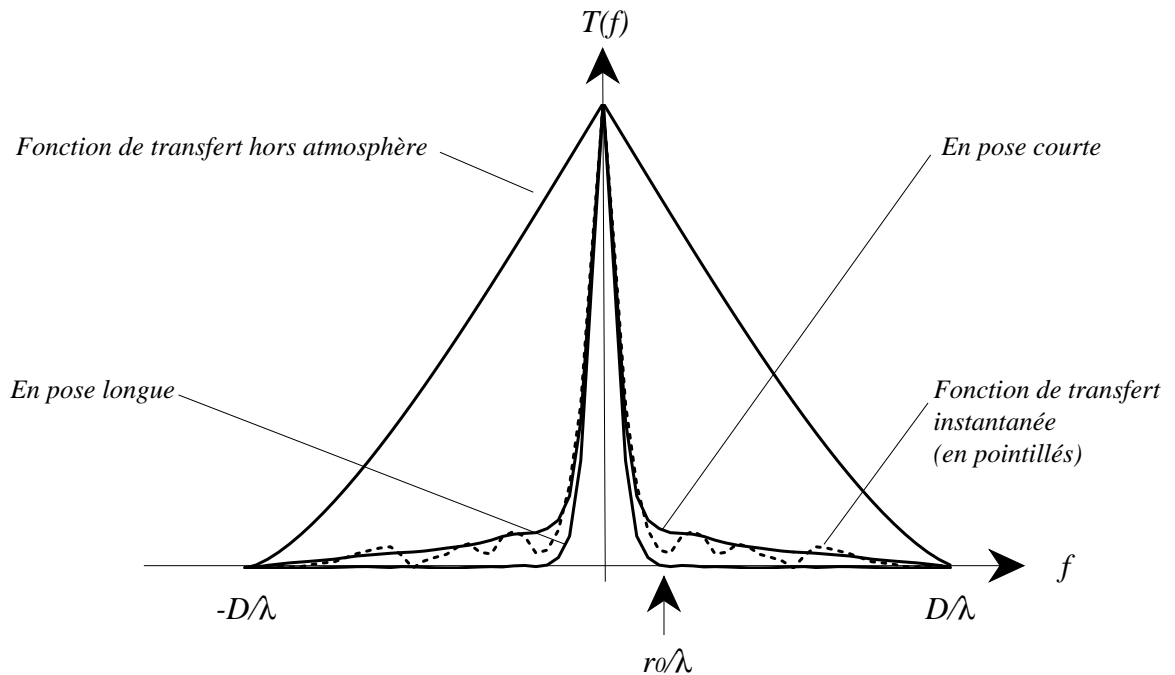


FIG. 1.5 – *Comparaison entre différentes fonctions de transfert. On remarque l'affaiblissement drastique que l'atmosphère introduit pour les fréquences intermédiaires entre r_0/λ et D/λ . Lorsqu'on intègre l'image, ces fréquences disparaissent complètement, emportant avec elles l'information à haute résolution...*

à des erreurs sur les mesures des paramètres astrophysiques de l'objet (par exemple le rapport de magnitude d'une étoile double). Une illustration spectaculaire de l'effet du non-isoplanétisme sur une étoile double due à Weigelt [78] montre une photographie d'un couple d'étoiles présentant deux structures tavelées légèrement différentes.

En pose longue

La cohérence temporelle du front d'onde conditionne la durée de vie des speckles. Celle-ci est d'autant plus courte que la turbulence est plus importante (elle varie comme r_0) ; elle est en général de l'ordre de quelques centièmes de secondes. Poser longtemps revient à moyenniser un grand nombre de réalisations de la réponse impulsionnelle. L'image se brouille et les fréquences spatiales disparaissent peu à peu de l'image : d'abord les plus élevées, correspondant aux plus fins détails, puis les plus faibles (voir la figure 1.6). L'image longue pose n'est plus qu'une tache de diamètre λ/r_0 et sa transformée de Fourier, la fonction de transfert longue pose possède une fréquence de coupure à r_0/λ dramatiquement inférieure à celle du télescope (figure 1.5).

1.3 L'interférométrie des tavelures

C'est la procédure qui a été retenue par Antoine Labeyrie lors de ses expériences au Mont-Palomar [40, 50, 51, 52]. Elle est basée sur l'analyse du moment du deuxième ordre (l'autocorrélation) ou de sa transformée de Fourier (le spectre de puissance) du champ de

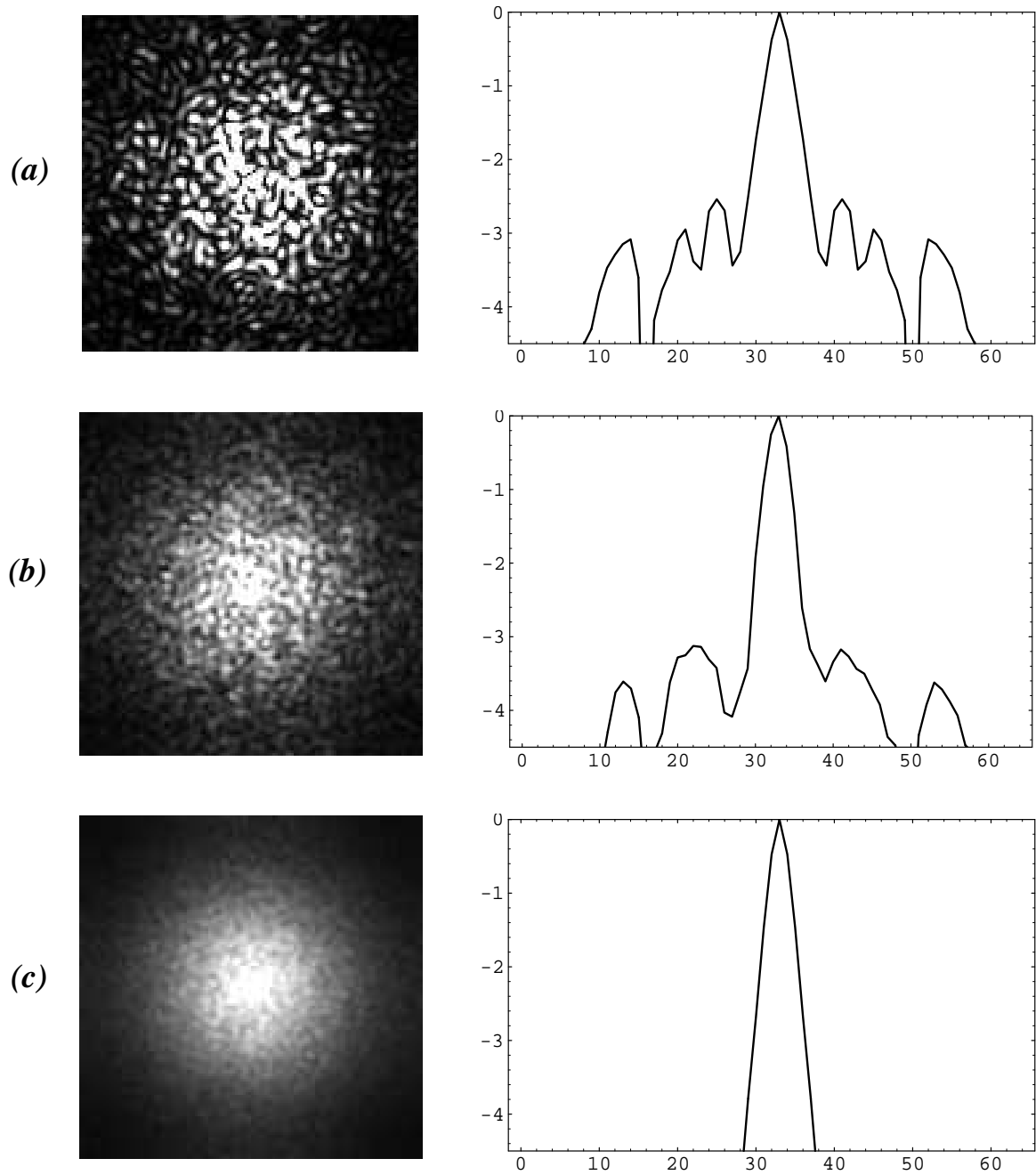


FIG. 1.6 – *Lorsqu'on intègre les images, les fréquences spatiales élevées disparaissent peu à peu de la fonction de transfert. Ici, on a simulé (a) une réponse impulsionnelle, (b) une pose d'environ un dixième de seconde correspondant à une intégration de 15 images et (c) une pose d'une seconde correspondant à l'intégration de 150 images. A droite, les fonctions de transfert correspondantes en échelle logarithmique.*

speckles.

L'autocorrélation d'une image aléatoire $S(r)$ est donnée par

$$C(\rho) = AC[S(r)] = \int S(r) S(r + \rho) dr \quad (1.5)$$

Observons un objet $O(r)$ au foyer d'un télescope en présence de turbulence. Si l'objet entre dans le domaine d'isoplanétisme et si $S(r)$ est la réponse impulsionnelle instantanée de l'ensemble télescope + atmosphère, alors l'image $I(r)$ observée au plan focal sera

$$I(r) = O(r) * S(r) \quad (1.6)$$

Le spectre de de puissance instantané de l'image est égal à

$$W(\nu) = |\hat{I}(\nu)|^2 = |\hat{O}(\nu)|^2 T(\nu) \quad (1.7)$$

où $T(\nu)$ est la fonction de transfert instantanée de l'image et où un symbole du type \hat{f} désigne la transformée de Fourier de la fonction f . En moyennant un grand nombre de ces spectres de puissances, on obtient une estimation d'un invariant statistique (la transformée de Fourier du moment d'ordre deux des structures de speckles) qui contient l'information haute résolution. Cette moyenne s'écrit

$$\langle W(\nu) \rangle = |\hat{O}(\nu)|^2 \langle T(\nu) \rangle \quad (1.8)$$

La quantité $|\hat{O}(\nu)|^2$ est la *fonction de visibilité* de l'objet (on dit parfois fonction d'objet). C'est simplement le carré du module de la transformée de Fourier de l'objet. On peut l'obtenir en inversant l'équation précédente et en estimant la fonction de transfert sur une étoile suffisamment voisine de l'objet pour que les propriétés statistiques de la turbulence soient les mêmes entre l'objet étudié et l'étoile de référence.

La fonction de visibilité permet d'obtenir certaines informations sur la forme de l'objet jusqu'à une résolution spatiale correspondant au pouvoir séparateur du télescope. Elle est parfaitement adaptée à la mesure du diamètre des étoiles géantes ou de la séparation des étoiles doubles. Elle trouve aussi des applications à l'intérieur du système solaire avec la mesure de diamètres d'astéroïdes [81], de satellites des planètes [27], la résolution du couple Pluton-Charon au début des années 1980 [26] ou même l'étude de la granulation solaire [1]. Elle ne permet néanmoins pas de faire de l'imagerie ; il faudrait pour cela estimer la phase de $\hat{O}(\nu)$ et faire une transformée inverse de Fourier. Cette phase n'est pas mesurée dans ce type d'analyse.

On trouvera des illustrations plus détaillées de la technique "Speckle Interferometry" dans l'annexe 1. Il existe aussi de nombreux articles de revue parmi lesquels on peut citer ceux de Labeyrie [51, 52], celui de Bates [24] et celui de Roddier [70] qui contient une liste de plusieurs centaines de références sur le sujet.

1.4 Quelques méthodes d'imagerie

Plusieurs techniques de reconstruction des images tavelées ont été proposées depuis les expériences de Labeyrie. Certaines d'entre elles, comme l'holographie ou la technique "Shift-and-Add" sont spectaculaires et simples à mettre en œuvre, mais elles ne sont applicables que dans des cas bien particuliers (présence d'une étoile proche ou objet brillant) ou sont

très sensibles au bruit (méthode de restauration de la phase à partir du module). L'état de l'art actuel a été présenté au dernier colloque de l'ESO, en Octobre 1991 ; la technique qui donne le plus de résultats est actuellement le "Speckle Making" de Weigelt.

Nous allons passer en revue quelques-unes de ces techniques ; il s'agit d'une description très sommaire, chaque méthode nécessitant une thèse à elle seule. Une revue plus détaillée se trouve dans l'article de revue de Roddier [70], et des références plus récentes dans la présentation d'Ayers [20] au colloque S.P.I.E. de San-Diego en Juillet 1990.

1.4.1 L'holographie des tavelures

Cette technique a été proposée en 1973 [23, 56]. Elle part de l'idée suivante : lorsqu'une étoile ponctuelle et relativement brillante se trouve à une distance angulaire β dans le même domaine d'isoplanétisme que l'objet observé, la réponse impulsionnelle est la même pour l'objet et pour l'étoile dite *de référence*. Il est alors possible de déconvoluer directement les images pour peu que l'on arrive bien à séparer l'objet et l'étoile. Il est aussi possible d'obtenir une estimation de l'objet en calculant l'autocorrélation du système étoile+objet. Si $O(r)$ est l'intensité qui vient de l'objet et $a\delta(r)$ celle qui vient de l'étoile, l'autocorrélation de l'ensemble est la somme de quatre termes :

$$AC[\text{objet} + \text{référence}] = a^2\delta(r) + aO(r - \beta) + aO(-r - \beta) + AC[\text{objet}] \quad (1.9)$$

C'est un point brillant à l'origine, entouré d'une masse qui est l'autocorrélation de l'objet. De part et d'autre de cette figure centrale, on voit apparaître l'objet lui-même et son image dans un miroir. Cette figure est bien connue des opticiens : elle n'est autre que la transformée de Fourier d'un hologramme de l'objet [31, 43] (d'où le nom d'holographie de speckle). On voit que si l'extension spatiale α de l'objet n'est pas trop grande (il faut que $3\alpha > 2\beta$) alors l'objet est bien séparé de la masse centrale. Il est aussi possible de calculer l'intercorrélacion entre l'objet et la référence pour éviter les termes centraux. Il est intéressant de noter que les deux images miroirs de l'objet sont multipliées par un facteur égal à l'intensité de l'étoile de référence ; ce qui est particulièrement intéressant en astronomie pour l'observation d'un objet très faible qui peut voir ainsi sa brillance artificiellement augmentée.

En présence de turbulence, cette autocorrélation est globalement convoluée avec celle de la réponse impulsionnelle (speckles) et l'on voit apparaître directement l'objet de chaque côté de la masse centrale (qu'on appelle souvent le "pic speckle"). Il existe néanmoins une indétermination de 180 degrés sur l'orientation due au choix que l'on doit faire entre les deux images miroirs.

Cette technique peut efficacement être utilisée lors d'une observation simultanée du même objet à deux longueurs d'onde (interférométrie différentielle). Certaines étoiles présentent une gigantesque enveloppe d'hydrogène qui émet principalement dans la raie rouge H_α . Observées dans le continu à une longueur d'onde voisine de celle de la raie H_α , ces étoiles ne montrent que leurs régions centrales trop petites pour être résolues par le télescope : l'image prise dans le continu peut alors servir de référence pour l'image dans la raie si elles sont simultanées.

De récents résultats de reconstruction par holographie ont été présentés au colloque de l'E.S.O. en Octobre 1991 [41].

1.4.2 Estimation de la phase de l’objet à partir du module

La technique de Labeyrie permet d’estimer le module de la transformée de Fourier de l’objet astronomique observé (en fait son carré, la fonction de visibilité). Pour inverser la transformée il faut connaître sa phase, qui est détruite dans le traitement. Ce problème de reconstruction de la phase apparaît dans tous les domaines de la physique et a été l’objet d’investigations théoriques considérables (voir par exemple [60] et les références à l’intérieur). L’unicité de la solution dépend essentiellement des propriétés du spectre de l’objet (notamment de la localisation de ses zéros dans le plan complexe), et divers modèles mathématiques plus ou moins compliqués ont été proposés.

C’est à Fienup [38] que l’on doit la première implémentation pratique d’un algorithme itératif de reconstruction d’images astronomiques. Partant d’une phase quelconque et connaissant le module du spectre, Fienup appliqua successivement des transformées directes et inverses de Fourier, en introduisant à chaque étape des contraintes sur l’objet (positivité et support borné) et sur son spectre (connaissance du module, phase impaire). Il montra dans son article de 1978 une application de cette technique à la reconstruction d’une image simulée d’étoile avec taches et protubérances. L’algorithme est néanmoins très sensible au bruit.

L’application de techniques de traitement d’images comme le recuit simulé a permis d’obtenir quelques résultats intéressants dans ce domaine [62, 63, 65].

1.4.3 le “Shift-and-Add”

Cette méthode est basée sur l’idée empirique que chaque speckle est une image déformée de l’objet observé. La technique consiste à isoler les speckles les plus brillants et à déterminer les coordonnées spatiales de leur photocentre. On obtient une série de points qui, intercorrélée avec l’image tavelée, donne directement la forme de l’objet. Le calcul est répété sur un grand nombre d’images et les résultats sont moyennés. Appliquée à l’image d’une étoile simple, cette technique produit une image proche de la tache d’Airy du télescope. Le shift-and-add connut son heure de gloire en 1976 avec la première reconstruction d’une image d’étoile en optique : on a pu pour la première fois observer directement l’enveloppe de Betelgeuse [80].

Pour des objets faibles ou très étendus, isoler des speckles dans l’image est parfois difficile ou impossible ; on peut alors choisir le speckle le plus brillant et recentrer toutes les images dessus (d’où le nom “Shift and Add”). La méthode devient très délicate à utiliser en comptage de photons [25, 44].

1.4.4 La méthode de Knox et Thompson

Elle peut être considérée comme une extension de la technique de Labeyrie. Au lieu de calculer le spectre moyen $|\hat{I}(\nu)|^2$ des images instantanées, Knox et Thompson [47] ont proposé de calculer l’interspectre de la même image prise à deux fréquences spatiales très voisines :

$$W_{\text{KT}}(\nu, \delta\nu) = \langle \hat{I}(\nu) \hat{I}^*(\nu + \delta\nu) \rangle \quad (1.10)$$

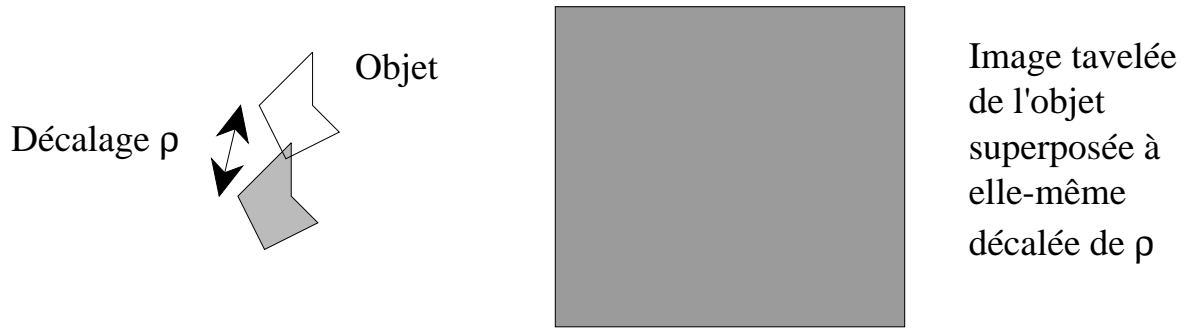


FIG. 1.7 – Illustration de la technique “Speckle Masking”. A gauche, l’objet astronomique observé présente une morphologie telle qu’en le décalant par rapport à lui-même, la superposition est presque un point. La même opération effectuée sur une image tavelée de l’objet permet une estimation de la réponse impulsionnelle.

L’hypothèse de convolution objet-image et l’indépendance des phases des réponses impulsionnelles conduit à écrire l’interspectre d’un objet étendu $O(r)$:

$$W_{\text{KT}}(\nu) = |\hat{O}(\nu)|^2 T(\nu) \exp\left(-i\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right) \quad (1.11)$$

La phase de l’interspectre de Knox et Thompson est la dérivée de celle de l’objet ($\phi(\nu)$) qui peut alors être calculée par intégration. L’objet peut ainsi être restitué par transformée inverse de Fourier.

Une méthode analogue à celle de Knox et Thompson est celle du gradient de phase proposée par Aitken [15, 16]. Ces méthodes ont donné des résultats astrophysiques intéressants [36, 73].

1.4.5 Le “Speckle Masking” ou opérateur de Weigelt

Il s’agit d’une analyse qui fait intervenir le moment du troisième ordre des champs de speckles : la triple corrélation ou sa transformée de Fourier, le bispectre. Ce sont des fonctions quadridimensionnelles dépendant l’une de deux décalages spatiaux, l’autre de deux fréquences spatiales.

L’idée sous-jacente à la naissance de cette technique était la suivante [77] : considérons un objet astronomique $O(r)$ présentant une structure telle qu’en le superposant à lui-même décalé d’une certaine quantité ρ on obtienne presque un point (comme dans l’exemple de la figure 1.7). Convolué par une réponse impulsionnelle tavelée, cette intersection fournit une estimation grossière de cette réponse impulsionnelle : on retrouve le cas de l’holographie des tavelures. Cette idée de superposer les tavelures a valu à cette technique le nom de “Speckle Masking”.

Mathématiquement l’opération peut s’écrire de la façon suivante [57]. Si $I(r)$ est l’intensité dans l’image et ρ_1 le décalage approprié, la réponse impulsionnelle est simplement le produit :

$$S(r) = I(r) I(r + \rho_1) \quad (1.12)$$

En intercorrélant cette fonction avec toute l'image comme dans le cas de l'holographie, on obtient la quantité

$$C(\rho_1, \rho_2) = \int I(r) I(r + \rho_1) I(r + \rho_2) dr \quad (1.13)$$

qui est la triple corrélation de l'image et qui contient *a priori* l'information sur la phase de l'objet. Les relations de convolution entre les corrélations restent vraies pour les triples corrélations, et si on note $TC[f]$ la triple corrélation d'une fonction f on peut écrire :

$$TC[I(r)] = TC[O(r)] * TC[S(r)] \quad (1.14)$$

La double transformée de Fourier de cette relation par rapport aux deux variables d'espace donne une multiplication simple des bispectres (notés $BS[]$) :

$$BS[I(r)] = BS[O(r)].BS[S(r)] \quad (1.15)$$

Comme pour l'ordre deux, le bispectre de la réponse impulsionnelle S peut être estimé sur une étoile de référence proche. L'objet est alors restitué à partir de son bispectre ; deux méthodes sont actuellement utilisées.

- Une reconstruction récursive faisant intervenir les relations de clôture entre les points de la phase du bispectre,
- Une méthode de type *Monte Carlo* où l'on reconstruit l'objet point par point en minimisant une distance entre le bispectre des objets successifs et celui qui est observé.

Là encore, on trouve une description détaillée de ces méthodes dans l'article de revue de Weigelt [78].

Roddier [69] a montré ont montré que la méthode de Knox et Thompson et celle de Labeyrie ne sont que des cas particuliers de l'analyse bispectrale ; elles s'appuient en fait sur des relations de clôture de phase. D'importants travaux théoriques ont été effectués sur ce sujet [19, 53], et des études comparatives de reconstruction d'images par les méthodes Knox-Thompson et Speckle Masking ont été présentées par Beletic [28] au colloque de l'ESO en Octobre 1991.

Chapitre 2

L'imagerie probabiliste — Statistique de l'intensité au plan focal à fort flux

2.1 Historique

Le premier article d'astronomie mentionnant l'imagerie probabiliste a été écrit par Bates [24] en 1982. On y trouve un court paragraphe décrivant la densité de probabilité du second ordre comme un outil d'imagerie possible en complément des techniques existantes (Shift-and-Add, Knox et Thompson, bispectre). A l'époque où avait été écrit cet article les densités de probabilités de champs de speckles étaient déjà utilisées pour décrire les phénomènes de diffraction de lumière laser à travers un milieu inhomogène. La première description théorique de ces figures d'interférences compliquées a été établie par Von Laue en 1916 [76]. L'invention des lasers dans les années 1960 a permis d'utiliser les speckles pour étudier les milieux de manière un peu analogue à ce qui se fait par la diffraction de rayons X. D'excellentes présentations du phénomène speckle et de ses applications ont été écrites par Dainty [33] et Goodman [32, 42].

En astronomie le problème est un peu similaire à ceci près qu'on s'intéresse à la source du rayonnement et non au milieu diffuseur qui est l'atmosphère terrestre. Claude Aime proposa l'utilisation des densités de probabilités du second ordre pour imager des systèmes d'étoiles [3, 4, 6]. Dans une communication de 1987 [5], il montra que l'imagerie probabiliste était plus générale que les méthodes basées sur le calcul des moments (Labeyrie, Knox et Thompson, Weigelt). L'expression de la densité de probabilité au second ordre est établie pour une étoile double établie et montre un graphe présentant une forte asymétrie se traduisant par la présence d'une ligne radiale dont la direction est fonction du rapport de magnitude entre les étoiles du couple. Ceci reste vrai à très faible flux en comptage de photons ; les densités de probabilités sont affectées par la statistique des photons et subissent une transformation dite de Poisson [59]. Aime montra aussi que lorsque le nombre de speckles devenait grand (donc pour un grand télescope) la statistique des images était en bon accord avec le modèle gaussien utilisé en optique cohérente.

En 1989 les premiers résultats de l'imagerie probabiliste sont obtenus sur des données astrophysiques. L'étoile ζ Aqr observée en infrarouge par Christian Perrier avec le

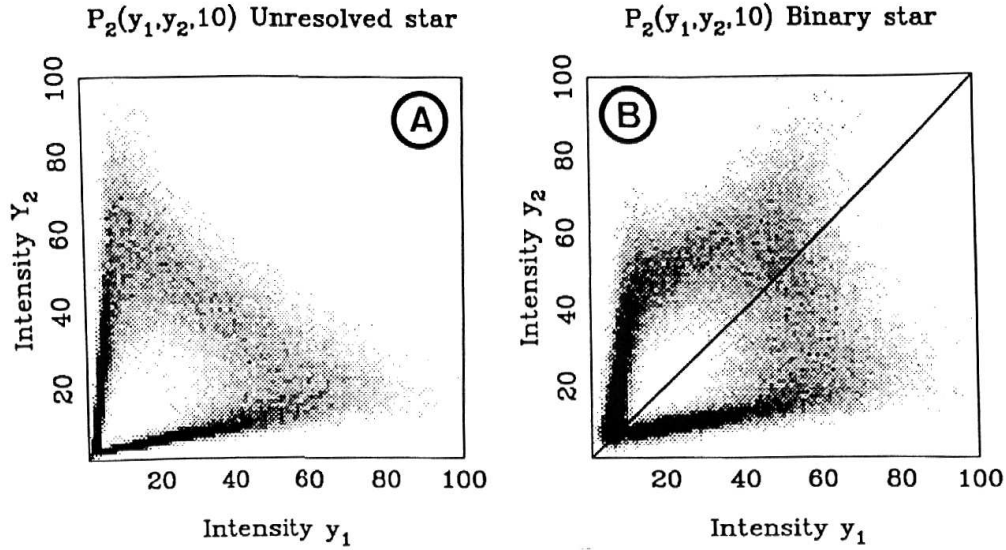


FIG. 2.1 – Densités de probabilités d'ordre deux obtenues sur des observations infrarouges de l'étoile double ζ Aqr. A gauche, la d.d.p. de l'étoile de référence, à droite celle de l'étoile double dont la dissymétrie saute aux yeux.

télescope de 3m60 de l'ESO est soumise à cette analyse : la densité de probabilité du second ordre est reproduite en figure 2.1 avec celle de l'étoile de référence. On voit sur la figure de l'étoile double une direction privilégiée correspondant à un rapport d'intensité de 1.4 entre les deux étoiles. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication en 1990 [7]. Le dépouillement des données de Perrier se poursuit encore ; on essaye maintenant de soustraire le bruit toujours très gênant en infrarouge. Le bruit est additif et se traduit par une convolution des densités de probabilité du signal et du bruit. La déconvolution des densités de probabilité de ζ Aqr par la méthode de Richardson-Lucy a fait l'objet d'un article récemment soumis pour publication [67].

A mon arrivée au laboratoire en 1990, je me suis occupé de la détection en comptage de photons et des divers problèmes que cela pouvait engendrer sur l'imagerie. Au moyen de simulations et par une approche théorique nous avons étudié les différents biais dus à la statistique des photons et aux capteurs (clipping et trou du centreur) d'une manière totalement différente de l'approche de Goodman et Belsher [34]. Nous avons pu montrer que le processus d'imagerie restait possible, quoique difficile, même quand la détection des photons se fait en tout ou rien" (le clipping) [8, 11, 13, 17, 18]. L'article [13] vient tout juste d'être accepté par la revue *J. Opt. Soc. Am. A*.

Parallèlement Claude Aime a élaboré un modèle théorique de la fonction caractéristique (transformée de Fourier de la densité de probabilité) d'une structure de speckles d'un objet étendu dans le cas gaussien [9]. Une nouvelle formulation a été publiée récemment qui ne fait plus d'hypothèse sur la statistique des speckles. On établit simplement une relation entre les fonctions caractéristiques d'un objet étendu et de sa réponse impulsionnelle (facile à estimer sur une étoile de référence). Le processus d'imagerie consistera simplement en l'ajustement aux observations du modèle ; il sera décrit au paragraphe 2.5.

Une présentation globale de nos travaux a fait l'objet d'une communication au colloque de Garching en Octobre 1991 [12]. Une copie du poster présenté à cette occasion se trouve dans l'annexe 2.

2.2 Illustration du processus d'imagerie d'une étoile double

Dans ce qui suit, nous noterons $I(r)$ la répartition d'intensité au plan focal du télescope. Nous allons décrire de manière très imagée l'évolution des caractéristiques d'une fonction qui est la densité de probabilité du second ordre de l'image aléatoire $I(r)$, lors du processus d'imagerie d'une étoile double tavelée.

Considérons deux positions r_1 et r_2 dans l'image. Les intensités qu'on y observe sont respectivement $I(r_1)$ et $I(r_2)$. Si I_1 et I_2 sont deux valeurs possibles de la fonction d'intensité $I(r)$, la probabilité conjointe dP pour que

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \leq I(r_1) < I_1 + dI_1 \\ \text{et} \\ I_2 \leq I(r_2) < I_2 + dI_2 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

est égale à :

$$dP = P_2(I_1, I_2; r_1, r_2) dI_1 dI_2 \quad (2.2)$$

La quantité $P_2(\bullet)$ est appelée *densité de probabilité du second ordre* de la fonction aléatoire $I(r)$.

On suppose souvent dans nos analyses que l'image est invariante par translation ; cette approximation est d'autant plus vérifiée que la turbulence est plus forte et que le champ de speckles s'étend très loin dans l'image. Sous cette hypothèse, la fonction P_2 ne dépend que du décalage $\rho = r_2 - r_1$. On peut alors écrire :

$$dP = P_2(I_1, I_2; \rho) dI_1 dI_2 \quad (2.3)$$

Et il est évident que

$$\iint P_2(I_1, I_2; \rho) dI_1 dI_2 = 1 \quad (2.4)$$

P_2 peut être estimé sur un grand nombre d'images comme un histogramme de co-occurrence des valeurs en deux points ; ce calcul est illustré en figure 2.2 dans le cas d'un signal monodimensionnel.

Considérons le cas d'une structure de speckles d'étoile double que nous supposerons orientée sur la direction des abscisses mesurées dans le plan focal. On admet que la condition d'isoplanétisme est vérifiée. On sait que l'image observée est la somme de deux réponses impulsionnelles pondérées par la magnitude des étoiles et décalées d'une quantité égale à la séparation du couple.

Soit α le rapport d'intensité des étoiles et d leur séparation. Soit s la taille du speckle. Nous prendrons le décalage spatial ρ suivant la direction des abscisses. La figure 2.3 montre l'évolution des plans $P_2(I_1, I_2)$ en fonction du décalage ρ . On observe les phénomènes suivants :

Pour $\rho = 0$ les deux points d'analyse r_1 et r_2 étant confondus, P_2 n'a de valeurs que sur la première diagonale. Elle s'écrit à l'aide de la densité de probabilité du premier ordre $P(I)$:

$$P_2(I_1, I_2; \rho = 0) = P(I_1) \delta(I_2 - I_1)$$

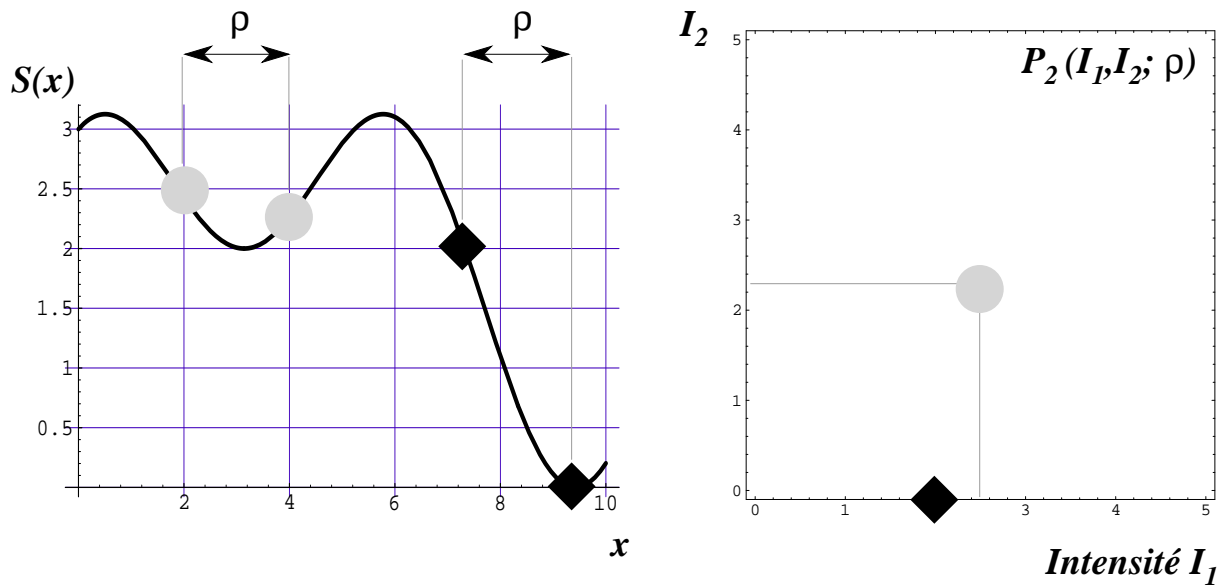


FIG. 2.2 – Illustration du calcul de P_2 sur un signal monodimensionnel $S(x)$ (à gauche). Pour un décalage ρ donné, on déplace deux points d'analyse sur la courbe $S(x)$ et on porte dans un graphique (à droite) les valeurs I_1 et I_2 pointées. Dans l'exemple ci-dessus, on pointe ($I_1 = 2.5, I_2 = 2.3$) pour le disque grisé et ($I_1 = 2, I_2 = 0$) pour le losange noir. Cette opération, répétée sur un grand nombre d'images $S(x)$, fournit une estimation de la densité de probabilité d'ordre deux.

Pour $\rho < s$ les deux points d'analyse sont corrélés ; si $I(r_1)$ peut prendre *a priori* n'importe quelle valeur, l'excursion de $I(r_2)$ autour de cette valeur est limitée. Ceci se traduit sur le graphe de P_2 par une certaine dispersion autour de la première bissectrice, dispersion qui décroît quand le rapport ρ/s augmente.

Pour $\rho = d$ on est à la séparation de l'étoile. le graphe montre une direction privilégiée $I_2 = \alpha I_1$ due au nombre élevé d'occurrences de r_1 sur un speckle de la première étoile et de r_2 sur la deuxième. La pente de cette droite est le rapport d'intensité des étoiles.

Pour $\rho \gg d$ il n'existe plus aucune corrélation entre les intensités aux points d'analyse et le graphe de P_2 est complètement rempli. Lorsque les speckles sont contenus dans une enveloppe limitée (ce qui est en général le cas) il arrive que les points d'analyse pour les grands décalages tombent l'un dans la tache image et l'autre dans le fond du ciel. Ceci se traduit par des valeurs anormalement élevées de la densité de probabilité sur les deux axes $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$.

On voit sur cet exemple simple comment la simple analyse visuelle des figures des densités de probabilité permet d'accéder au vecteur séparation et à la différence de magnitude entre les étoiles. Pour une image réelle, le décalage ρ s'exprime en unités de pixels et peut prendre NQ valeurs si l'image est de dimension $N \times Q$. On obtient le vecteur séparation en examinant les plans $P_2(I_1, I_2; \rho)$ pour toutes les valeurs de ρ et en recherchant la présence d'une ligne de crête. La différence de magnitude entre les étoiles est simplement donnée par la pente de la ligne de crête. Il est important de remarquer ici que α est déterminé sans

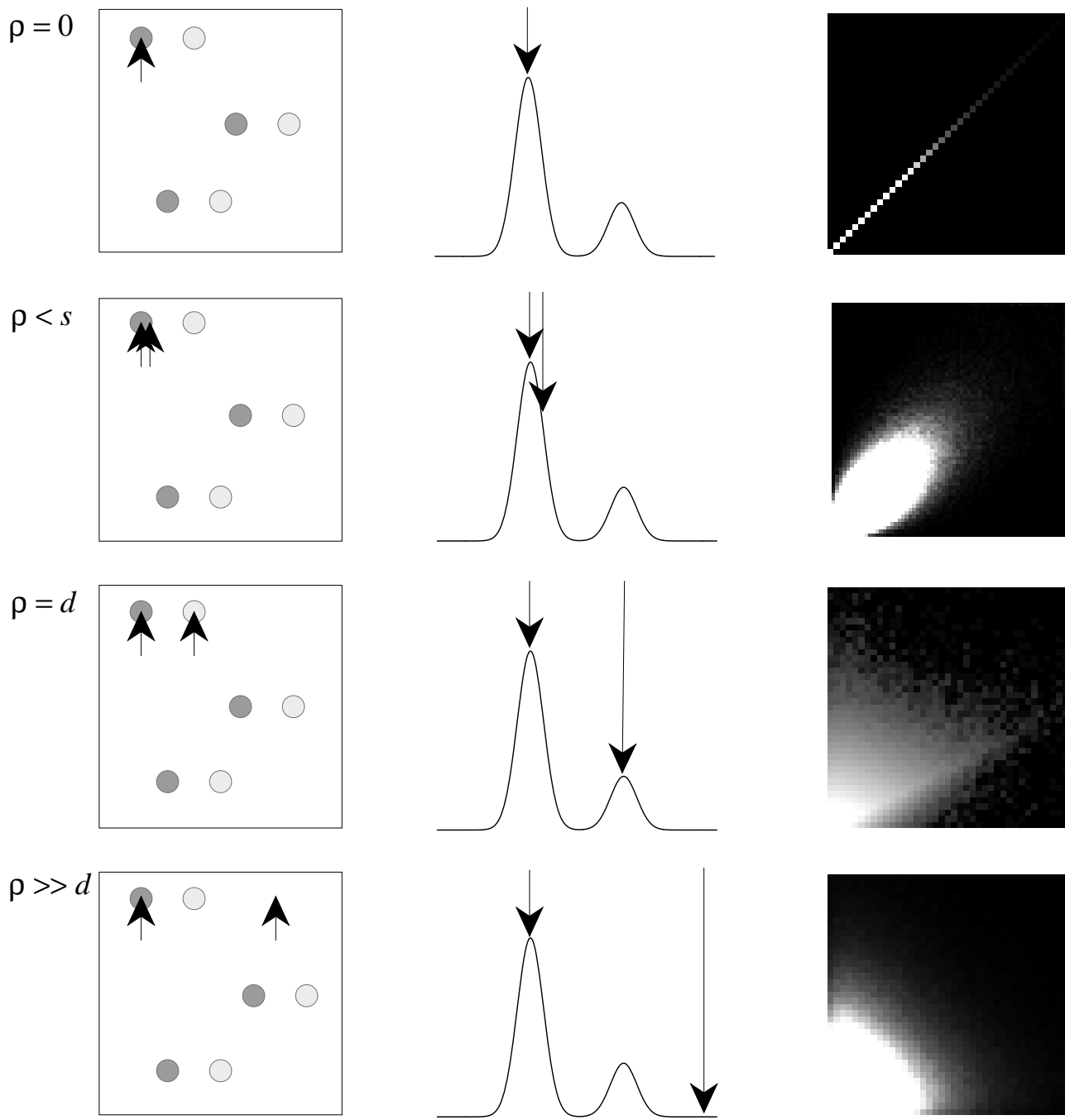


FIG. 2.3 – Calcul de la densité de probabilité d'ordre deux pour des tavelures d'étoile double. Sur les images de gauche, on a représenté schématiquement des images de trois tavelures du couple d'étoiles (les deux cercles grisés). Les courbes du milieu représentent des coupes de l'image bidimensionnelle selon une ligne qui passerait au centre d'une tavelure du couple. Les flèches représentent les points d'analyse. A droite, les graphes des densités de probabilité correspondant aux décalages indiqués sur le dessin. Voir le texte pour plus de détails.

équivoque: une valeur mesurée de 0.8 signifie que la deuxième étoile rencontrée lorsqu'on balaye les images pour calculer la densité de probabilité possède une intensité de 0.8 fois celle de la première. L'image du système peut alors être obtenue *sans ambiguïté*. La même analyse aurait pu être faite sur les fonctions caractéristiques, transformées de Fourier de la densité de probabilité dans les plans (I_1, I_2) et qui présente de la même façon une direction privilégiée lorsqu'elle est calculée pour un décalage ρ égal au vecteur séparation.

2.3 Quelques définitions et rappels sur les fonctions statistiques

Parmi les nombreuses fonctions statistiques existantes, il en est dont nous nous servons assez régulièrement (densité de probabilité, fonction caractéristique, etc...). Ce paragraphe condensé rappelle leurs définitions et les diverses relations qui les lient les unes aux autres. Des exposés plus complets existent dans la littérature, par exemple [54, 64, 72].

2.3.1 Densité de probabilité

Soit $\Omega(r)$ une fonction aléatoire de la position r . Soit $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_N)$ une collection de N valeurs possibles de la fonction $\Omega(r)$. Soit $\mathbf{R} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ une collection de N points que j'appellerai *points d'analyse* et $\mathbf{\Omega} = (\Omega(r_1), \Omega(r_2), \dots, \Omega(r_N))$ les valeurs de la fonction $\Omega(r)$ en ces points. La probabilité élémentaire $d^N P$ pour que $\mathbf{\Omega}$ soit compris dans l'hypervolume élémentaire $\prod_{i=1}^N dI_i$ autour de \mathbf{I} est égale à :

$$d^N P = P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R}) d^N \mathbf{I} \quad (2.5)$$

La fonction $P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R})$ est appelée *densité de probabilité d'ordre N* de la fonction $\Omega(r)$. Son intégrale par rapport à toutes les composantes de \mathbf{I} est égale à 1 :

$$\int_{\infty} P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R}) d^N \mathbf{I} = 1 \quad (2.6)$$

Au premier ordre $P(I)dI$ est simplement la probabilité pour que la valeur de la fonction aléatoire Ω soit comprise entre I et $I + dI$ en un point donné. Je noterai parfois $[I]$ la valeur de $P(I)$ et $[\bullet]$ la probabilité de l'événement certain (c'est l'intégrale de $P(I)$ sur toutes les valeurs de I et elle vaut 1). Sous l'hypothèse d'invariance par translation (on parle aussi de *stationnarité*), $P(I)$ ne dépend pas du point d'analyse.

Au deuxième ordre on s'intéresse à la quantité $P_2(I_1, I_2; r_1, r_2)$ dont nous avons déjà parlé au paragraphe 2.2 Elle mesure la probabilité conjointe de deux occurrences de I_1 et I_2 aux points d'analyse r_1 et r_2 . Sous l'hypothèse d'invariance par translation, P_2 ne dépend que du vecteur décalage $\rho = r_2 - r_1$ et peut s'écrire en utilisant la notation $[\]$:

$$[I_1 I_2]_{\rho} = P_2(I_1, I_2; \rho) \quad (2.7)$$

Lorsque le décalage ρ entre les points d'analyse devient grand, leur corrélation chute et la densité de probabilité P_2 tend asymptotiquement vers le produit des densités du premier ordre :

$$[I_1 I_2]_{\infty} = [I_1][I_2] = [I]^2 \quad (2.8)$$

Lorsque les deux points d'analyse sont confondus ($\rho = 0$) P_2 n'a de valeurs que pour $I_1 = I_2$ et s'écrit :

$$[I_1 I_2]_0 = P(I_1) \delta(I_2 - I_1) \quad (2.9)$$

L'intégration de P_2 suivant I_1 ou I_2 traduit l'occurrence de I_1 ou de I_2 avec l'événement certain. On peut écrire :

$$\int_{I_1=0}^{\infty} P_2(I_1, I_2; \rho) dI_1 = \int_{I_2=0}^{\infty} P_2(I_1, I_2; \rho) dI_2 = [I_1 \bullet] = [\bullet I_2] = [I] \quad (2.10)$$

En d'autres termes, la projection de la densité de probabilité du second ordre sur ses axes est égale à la densité d'ordre 1.

2.3.2 Fonction caractéristique — Fonction génératrice des moments

La fonction caractéristique de la variable aléatoire $\Omega(r)$ est égale à la transformée de Fourier de la densité de probabilité par rapport aux variables I_i :

$$\phi_N(\mathbf{U}; \mathbf{R}) = \int_0^{\infty} e^{i\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}} P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R}) d^N \mathbf{I} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ représente la collection des variables conjuguées des I_i et $\mathbf{U} \cdot \mathbf{I}$ est le produit scalaire entre les deux vecteurs. Il est trivial de voir que $\phi_N(0) = 1$.

La fonction génératrice des moments de la fonction aléatoire $\Omega(r)$ est la transformée de Laplace de la densité de probabilité :

$$G_N(\mathbf{V}; \mathbf{R}) = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{V} \cdot \mathbf{I}} P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R}) d^N \mathbf{I} \quad (2.12)$$

où $\mathbf{V} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ est le vecteur des variables conjuguées des valeurs I_i .

On peut écrire à partir des définitions 2.11 et 2.12 la relation entre la fonction génératrice des moments et la fonction caractéristique :

$$\phi_N(\mathbf{U}; \mathbf{R}) = G_N(i\mathbf{U}; \mathbf{R}) \quad (2.13)$$

2.3.3 Moments et cumulants

Les moments interviennent beaucoup en interférométrie et imagerie des tavelures. On utilise fréquemment les fonctions de corrélations et de triple corrélation ou leurs transformées de Fourier. Les cumulants sont peu utilisés en astronomie ; ils se révèlent pourtant un excellent outil d'analyse d'images à très faible flux et ne présentent pas le biais dû à la statistique des photons qu'on trouve sur les moments d'ordre deux et trois [11, 13].

Les moments

Le moment d'ordre N de la fonction aléatoire $\Omega(r)$ est donné par :

$$m_N(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^N I_i \right) P_N(\mathbf{I}; \mathbf{R}) d^N \mathbf{I} \quad (2.14)$$

Sous l'hypothèse d'invariance par translation, on peut écrire en fonction des densités de probabilité :

– la moyenne : $\langle \Omega(r) \rangle = \int_{I=-\infty}^{\infty} I P(I) dI$

– l'autocorrélation : $C(\rho) = \langle \Omega(r) \Omega^*(r + \rho) \rangle = \int_{I_1=-\infty}^{\infty} \int_{I_2=-\infty}^{\infty} I_1 I_2 P_2(I_1, I_2; \rho) dI_1 dI_2$

– la triple corrélation :

$$C_3(\rho_1, \rho_2) = \langle \Omega(r) \Omega^*(r + \rho_1) \Omega^*(r + \rho_2) \rangle = \iiint I_1 I_2 I_3 P_3(I_1, I_2, I_3; \rho_1, \rho_2) dI_1 dI_2 dI_3$$

Les moments peuvent aussi être exprimés à l'aide de la fonction génératrice des moments dont ils sont les termes du développement en série de Mac-Laurin (d'où le nom de fonction génératrice des moments) :

$$m_N(\mathbf{R}) = \left(\frac{\partial^N G_N(\mathbf{V}; \mathbf{R})}{\prod_{i=1}^N \partial v_i} \right)_{\mathbf{V}=0} \quad (2.15)$$

Les cumulants

La fonction génératrice des cumulants $K_N(\mathbf{V}; \mathbf{R})$ est le logarithme népérien (noté Log dans toute la suite) de la fonction génératrice des moments :

$$K_N(\mathbf{V}; \mathbf{R}) = \text{Log}(G_N(\mathbf{V}; \mathbf{R})) \quad (2.16)$$

Les cumulants de la fonction aléatoire $\Omega(r)$ sont définis par les dérivées n-èmes de la fonction génératrice des cumulants (ou la dérivée logarithmique de la fonction génératrice des moments) :

$$\kappa_N(\mathbf{R}) = \left(\frac{\partial^N K_N(\mathbf{V}; \mathbf{R})}{\prod_{i=1}^N \partial v_i} \right)_{\mathbf{V}=0} = \left(\frac{\partial^N \text{Log}(G_N(\mathbf{V}; \mathbf{R}))}{\prod_{i=1}^N \partial v_i} \right)_{\mathbf{V}=0} \quad (2.17)$$

2.4 Le phénomène speckle décrit comme une marche aléatoire bidimensionnelle — Le modèle Gaussien

Les variations de phase sur l'onde étant aléatoires, il est impossible de modéliser les champs de tavelures de manière déterministe. On ne peut que décrire leurs propriétés statistiques en considérant que l'onde qui arrive au plan focal du télescope est la somme d'ondes élémentaires et s'écrit :

$$A = \sum_{k=1}^N a_k e^{i\phi_k} \quad (2.18)$$

On peut supposer de manière très générale que

- les amplitudes complexes a_k de toutes les ondes élémentaires sont indépendantes,
- il n'y a aucune corrélation entre l'amplitude a_k et la phase ϕ_k d'une onde élémentaire,
- les phases élémentaires sont distribuées uniformément entre 0 et 2π ,
- toutes les amplitudes élémentaires obéissent à la même statistique et ont toutes la même moyenne a et la même variance $\langle a^2 \rangle$.

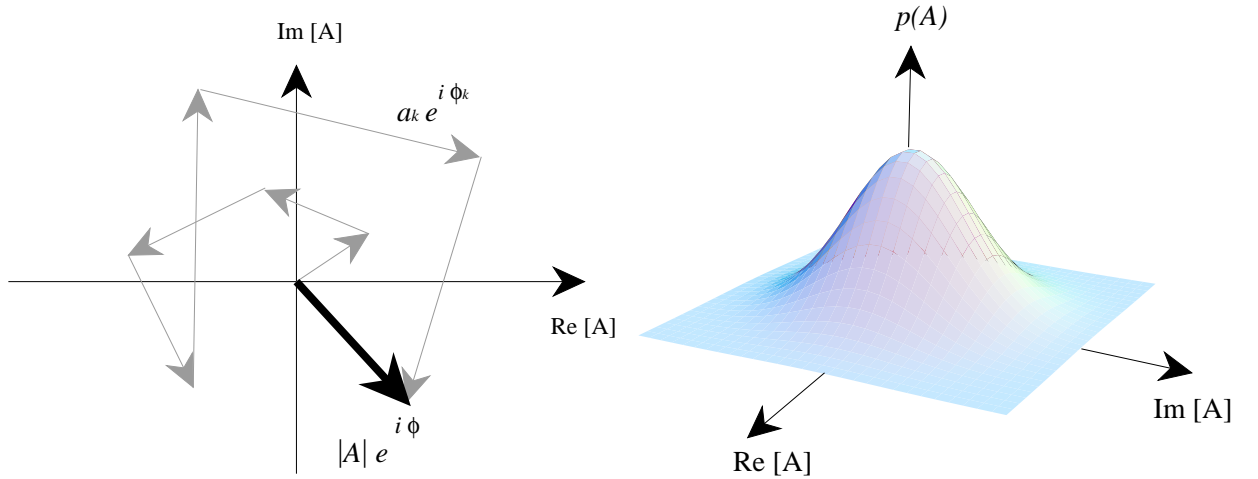


FIG. 2.4 – L'amplitude complexe de l'onde au foyer du télescope est la somme d'un grand nombre d'ondes élémentaires; le phénomène est assimilable à une marche aléatoire bidimensionnelle (à gauche) conduisant à une densité de probabilité gaussienne pour l'onde résultante (à droite).

Chacune des ondes élémentaires peut être représentée dans le plan complexe par un vecteur de Fresnel (figure 2.4) et le problème se ramène à celui d'une marche aléatoire bidimensionnelle. Lorsque N devient très grand, on peut appliquer le théorème de la limite centrale et la densité de probabilité de l'amplitude complexe de l'onde résultante prend une forme asymptotique gaussienne indépendante des propriétés du milieu diffuseur [32, 42]

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\Re[A]^2 + \Im[A]^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.19)$$

où $\Re[A]$ et $\Im[A]$ sont les parties réelles et imaginaires de l'amplitude complexe A et σ^2 , sa variance est la demi-somme des variances des ondes a_k :

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \langle a^2 \rangle \quad (2.20)$$

Un changement de variable simple (c'est un passage en coordonnées polaires) permet d'écrire la densité de probabilité de l'intensité au plan focal, carré du module de l'amplitude complexe :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (2.21)$$

Cette fonction est indépendante de la position dans l'image et décrit un champ de speckle qui s'étend à l'infini (hypothèse stationnaire). Sa transformée de Fourier est la fonction caractéristique

$$\phi(u) = \frac{1}{1 - iu\langle I \rangle} \quad (2.22)$$

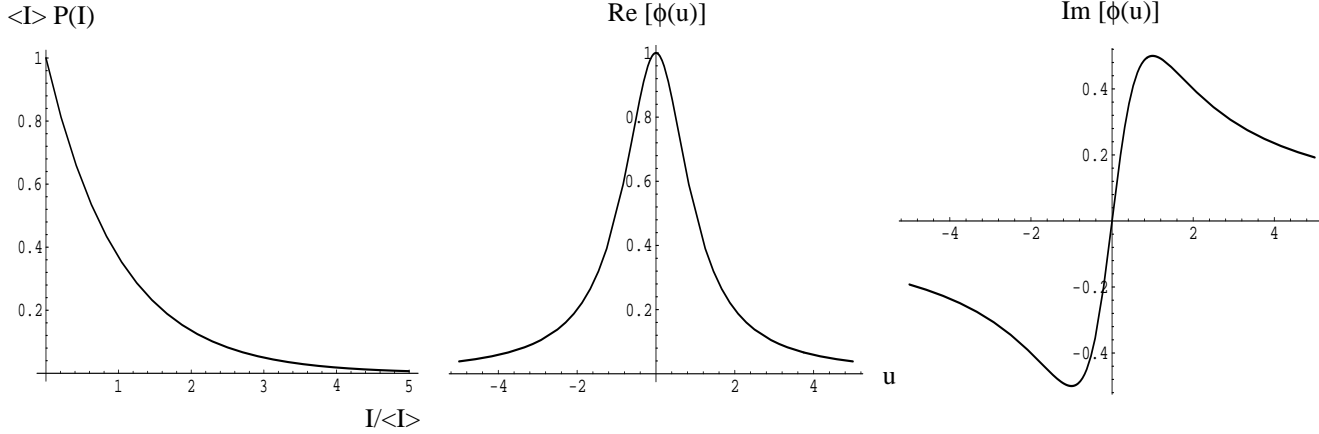


FIG. 2.5 – Densité de probabilité (à gauche) et fonction caractéristique (au milieu, partie réelle, à droite, partie imaginaire) d’une structure de speckles gaussienne pour un point source.

Ce modèle est particulièrement adapté à la description des champs de speckles produits par la diffusion d’une lumière laser dans un milieu inhomogène : ce sont les molécules qui diffusent la lumière et leur nombre est extrêmement élevé. L’hypothèse gaussienne est une bonne approximation en astronomie quand la turbulence est particulièrement mauvaise et/ou quand le diamètre du télescope est grand ; le nombre N d’ondes élémentaires indépendantes qui forment les tavelures observées est de l’ordre de celui des zones de cohérences intersectées par la pupille du télescope, soit $(D/r_0)^2$. Si ce nombre n’est pas assez élevé pour appliquer le théorème de la limite centrale, la statistique des champs de speckles au foyer dépend de celle de l’amplitude complexe sur la pupille (dont on sait qu’elle est plutôt log-normale et présente essentiellement des fluctuations de phase [2, 29]).

2.4.1 Statistique au deuxième ordre pour un point source

La densité de probabilité du second ordre d’un champ de speckles gaussien est donnée par [33, 42] :

$$[I_1 I_2]_\rho = P_2(I_1, I_2; \rho = 0) = \frac{\exp\left(-\frac{I_1 + I_2}{\langle I \rangle (1 - \mu^2)}\right)}{\langle I \rangle^2 (1 - \mu^2)} I_0\left(\frac{2\sqrt{I_1 I_2} \mu}{\langle I \rangle (1 - \mu^2)}\right) \quad (2.23)$$

où μ est le *facteur de cohérence* de l’amplitude complexe $A(r)$ de l’onde entre les points d’analyse r_1 et r_2 :

$$\mu(r_1, r_2) = \frac{\langle A(r_1) A^*(r_2) \rangle}{\langle I \rangle} \quad (2.24)$$

Le facteur μ peut être exprimé en fonction de la pupille de l’instrument ; l’expression générale est donnée dans la revue de Goodman [32]. Pour une ouverture circulaire, μ est la racine carrée d’une fonction d’Airy :

$$\mu = \left| 2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D \rho}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi D \rho}{\lambda z}} \right| \quad (2.25)$$

avec

- D = Diamètre du télescope
- λ = longueur d'onde
- z = focale du télescope

Une expression de la densité de probabilité au troisième ordre $[I_1 I_2 I_3]_{\rho_1 \rho_2}$ pour un point source a été récemment donnée par Rao Gudimetla [66]. Il n'y a pas d'expression analytique connue au delà de l'ordre trois.

La fonction caractéristique au deuxième ordre est simplement la transformée de Fourier de la densité de probabilité par rapport aux deux intensités. Elle dépend aussi du décalage ρ entre les points d'analyse et possède une partie réelle paire et une partie imaginaire impaire (c'est la condition pour que sa transformée de Fourier soit réelle). Son expression est beaucoup plus simple que celle de P_2 :

$$\phi_2(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{(1 - iu_1 \langle I \rangle)(1 - iu_2 \langle I \rangle) + u_1 u_2 \langle I \rangle^2 \mu^2} \quad (2.26)$$

Le graphe de ces fonctions est représenté en figure 2.6.

Fonction d'autocorrélation — Densité spectrale La fonction d'autocorrélation d'une image $S(r)$ s'écrit :

$$C(\rho) = \langle S(r)S(r + \rho) \rangle = \int_{I_1=0}^{\infty} \int_{I_2=0}^{\infty} I_1 I_2 P_2(I_1, I_2; \rho) dI_1 dI_2 \quad (2.27)$$

ou de manière équivalente en faisant intervenir la fonction caractéristique :

$$C(\rho) = - \left(\frac{\partial^2 \phi_2(u_1, u_2; \rho)}{\partial u_1 \partial u_2} \right)_{u_1=u_2=0} \quad (2.28)$$

En utilisant les expressions 2.23 ou 2.26, l'autocorrélation prend la forme simple :

$$C(\rho) = \langle I \rangle^2 (1 + \mu(\rho)^2) \quad (2.29)$$

Sa transformée de Fourier, la fonction de transfert, s'écrit :

$$W(\nu) = \iint \hat{P}_2(I_1, I_2; \nu) dI_1 dI_2 \quad (2.30)$$

La fonction $\hat{P}_2(I_1, I_2; \nu)$ est la transformée de Fourier de la densité de probabilité $[I_1 I_2]_{\rho}$ par rapport à la variable d'espace ρ . L'intérêt de cette fonction sera discuté plus loin pour l'application de l'imagerie probabiliste à la synthèse d'ouverture.

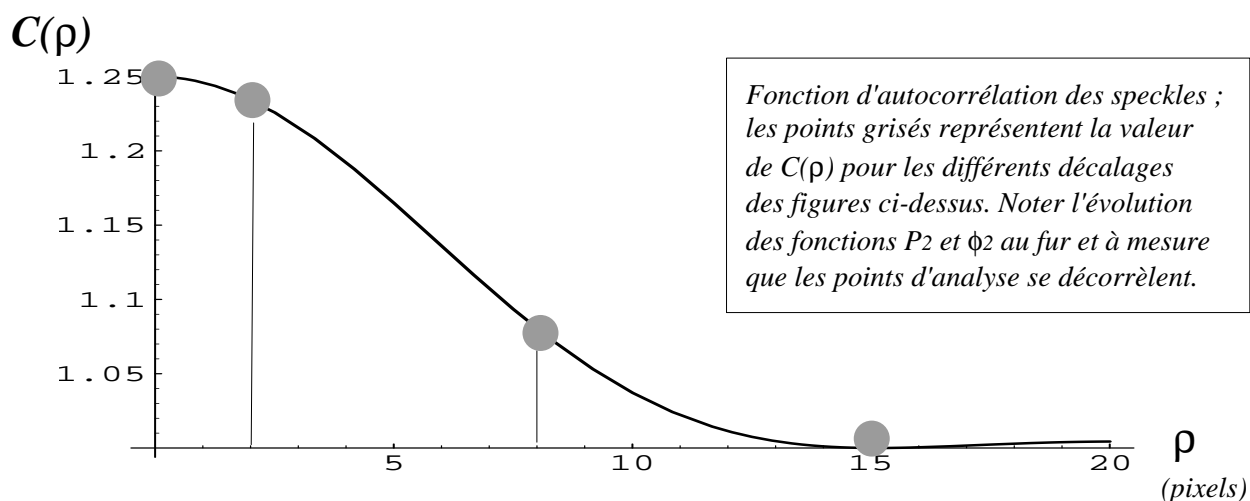
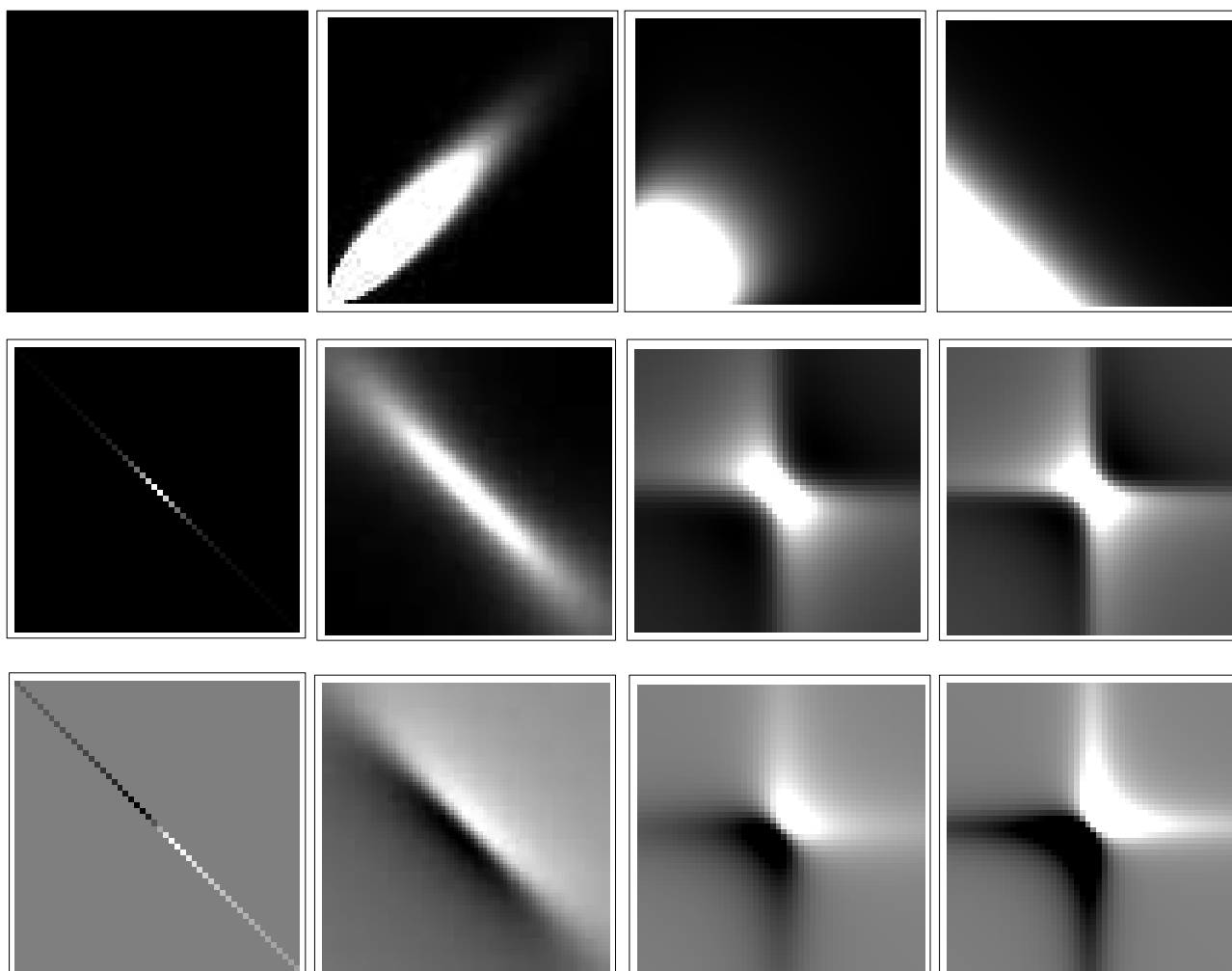


FIG. 2.6 – Visualisation en niveaux de gris de la densité de probabilité d'ordre 2 (au dessus) et de la fonction caractéristique (partie réelle au milieu et partie imaginaire au dessous) d'une structure de speckle gaussienne pour un point source aux décalages $\rho = 0$, $\rho = 2$, $\rho = 8$, $\rho = 15$. Les décalages sont reportés sur la courbe de la fonction de corrélation de l'amplitude complexe comme des petits disques grisés.

2.4.2 Cas d'une étoile double — Superposition de deux champs de speckles

L'image d'une étoile double observée en présence de turbulence est la superposition de deux structures tavelées décalées d'une quantité égale à la séparation du couple (d) et pondérées par le rapport d'éclat entre les étoiles (α). Si la condition d'isoplanétisme est vérifiée, l'image $I(r)$ observée est :

$$I(r) = S(r) + \alpha S(r - d) \quad (2.31)$$

L'intensité observée est la somme de deux variables aléatoires qui sont décorréélées si la séparation du couple est grande devant la taille du speckle. On peut ainsi écrire :

$$I = I_1 + I_2 \quad (2.32)$$

où I_1 est la contribution à l'intensité I du champ de tavelures de la première étoile, et I_2 celle de la deuxième étoile. I_1 et I_2 sont deux variables aléatoires qui obéissent chacune à la loi exponentielle décroissante définie au paragraphe précédent :

$$\begin{cases} P(I_1) = \frac{1}{\langle I_1 \rangle} e^{-I_1 / \langle I_1 \rangle} \\ P(I_2) = \frac{1}{\langle I_2 \rangle} e^{-I_2 / \langle I_2 \rangle} \end{cases} \quad (2.33)$$

avec $\langle I_2 \rangle = \alpha \langle I_1 \rangle$. La densité de probabilité s'écrit dans ce cas [32] :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle (1 - \alpha)} \left[\exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) - \exp\left(-\frac{I}{\alpha \langle I \rangle}\right) \right] \quad (2.34)$$

Il est intéressant de remarquer que cette fonction est très différente de la densité de probabilité de la réponse impulsionnelle donnée par l'équation 2.21 ; elle s'annule pour $I = 0$ et présente un maximum à la valeur

$$I = \frac{\alpha \text{Log} \alpha}{\alpha - 1} \langle I \rangle \quad (2.35)$$

Cette valeur peut être utilisée pour déterminer le rapport d'intensité entre les deux composantes du système double, la densité de probabilité du premier ordre pouvant être estimée sur un ensemble d'images comme un histogramme des valeurs des pixels. Une détermination du maximum de cet histogramme permet (dans les limites où le modèle Gaussien est applicable) d'obtenir une estimation de la valeur du rapport α . La simple inspection visuelle de l'histogramme peut diagnostiquer la duplicité du système. Par contre, aucune information spatiale sur l'étoile double ne peut être obtenue de cette manière. Il faut pousser l'analyse au second ordre pour connaître le vecteur séparation du couple. La fonction

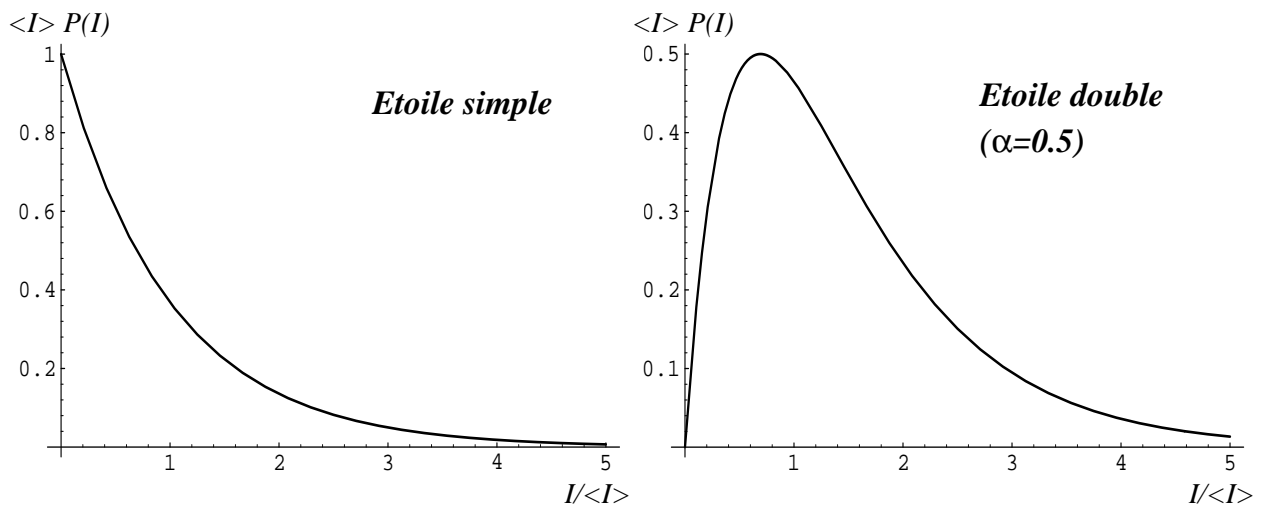


FIG. 2.7 – Densités de probabilité de champs de speckles gaussiens. A gauche, pour un point source, à droite pour une étoile double de rapport d'intensité $\alpha = 0.5$.

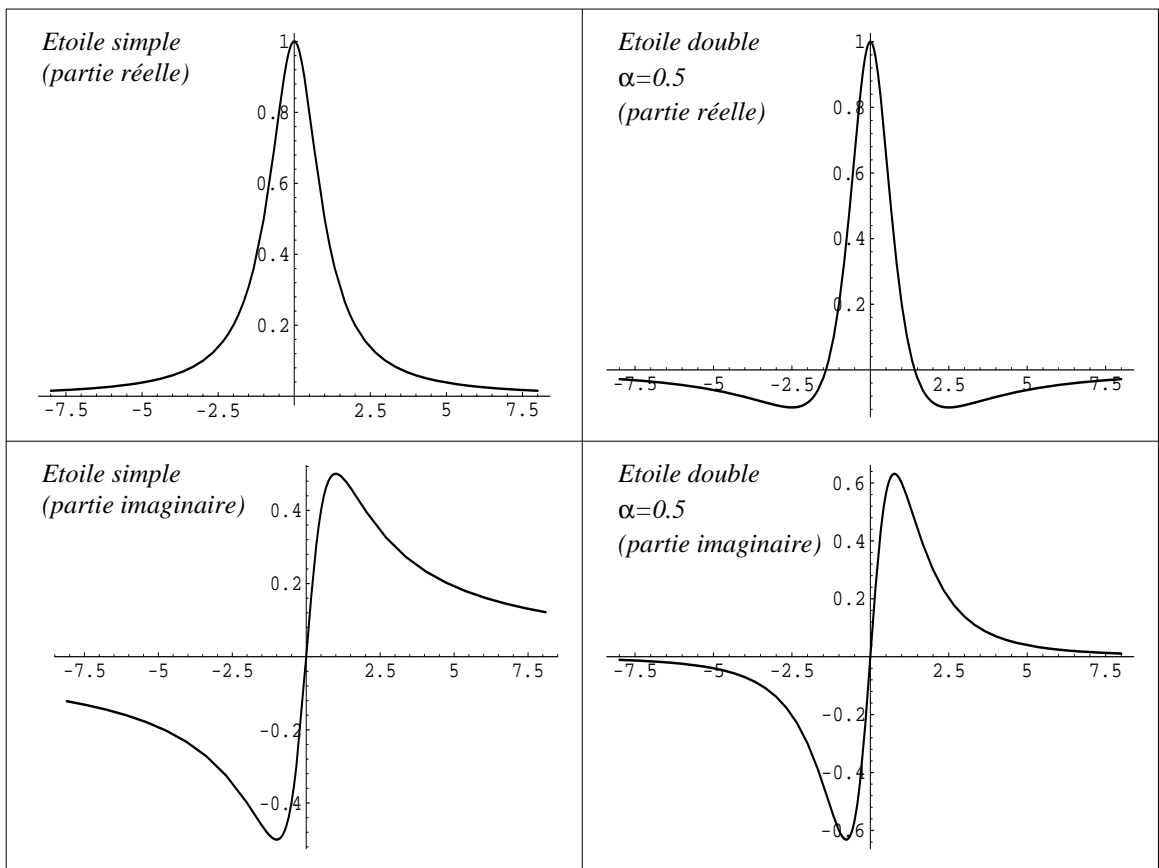


FIG. 2.8 – Fonctions caractéristiques correspondantes.

caractéristique est la transformée de Fourier de l’expression 2.34 :

$$\phi(u) = \frac{1}{(1 - iu)(1 - i\alpha u)} \quad (2.36)$$

C’est une fonction dont la partie réelle présente des “pieds” négatifs qui n’étaient pas observés dans le cas de l’étoile simple (voir la figure 2.8). La différence avec la réponse impulsionnelle n’est cependant pas aussi spectaculaire que pour la densité de probabilité.

Analyse au second ordre

Une expression simplifiée de la densité de probabilité au deuxième ordre peut être obtenue si on suppose que les speckles sont delta-corrélés. La fonction s’exprime alors comme le produit des densités du premier ordre :

$$[I_1 I_2]_\rho = [I_1][I_2] \quad (2.37)$$

Dans le cas particulier où le décalage ρ est égal à la séparation entre les étoiles, P_2 prend la forme suivante [3] :

$$[I_1 I_2]_d = \frac{1}{\alpha \beta \langle I \rangle^2} \exp\left(-\frac{I_1}{\alpha \langle I \rangle} - \frac{I_2}{\langle I \rangle}\right) \left[\exp\left(\frac{\beta}{\langle I \rangle} \text{Inf}\left(I_2, \frac{I_1}{\alpha}\right)\right) - 1 \right] \quad (2.38)$$

avec $\beta = \alpha + 1/\alpha - 1$. La figure 2.9 montre une représentation en niveaux de gris de cette fonction pour plusieurs valeurs du rapport α : on voit apparaître la ligne de crête d’équation $I_1 = \alpha I_2$ décrite précédemment. Elle traduit les nombreuses occurrences des points d’analyse sur les tavelures des deux étoiles.

La fonction caractéristique présente le même type de structure que la densité de probabilité lorsque $\rho = d$. C’est une fonction hermitienne dont le module est représenté en figure 2.9 pour plusieurs valeurs du rapport α . Son expression peut être calculée en prenant la transformée de Fourier de l’équation 2.38 :

$$\phi_2(u_1, u_2; \rho = d) = \frac{1}{(1 - iu_1)(1 - i\alpha u_2)(1 - i\alpha u_1 - iu_2)} \quad (2.39)$$

2.4.3 Cas d’un objet étendu

Un objet astrophysique est généralement observé par un télescope équipé d’un système d’acquisition d’images qui échantillonne l’intensité dans le plan focal (par exemple une caméra CCD). On peut alors considérer n’importe quel objet étendu échantillonné comme une matrice de points et écrire l’intensité provenant de l’objet comme une somme discrète de valeurs :

$$O(r) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \delta(r - d_n) \quad (2.40)$$

Partant de cette hypothèse, nous avons calculé la fonction caractéristique d’ordre Q d’un tel objet observé en présence de turbulence (sous l’hypothèse d’isoplanétisme). Le calcul est décrit dans l’article ci-après.

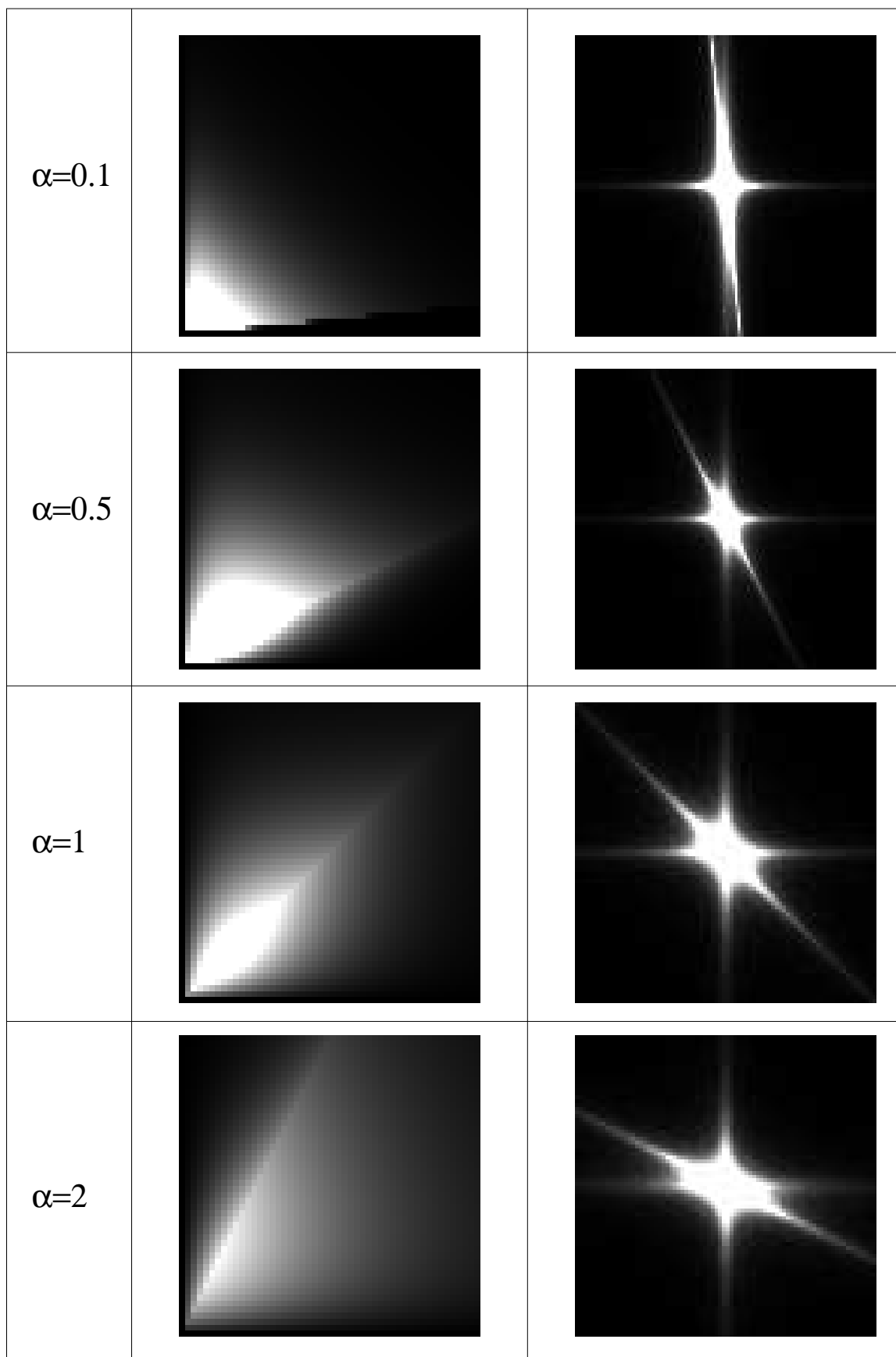


FIG. 2.9 – Densités de probabilité au second ordre pour $\rho = d$ (à gauche) et modules des fonctions caractéristiques correspondantes pour des étoiles doubles de divers rapport d'intensité α .

Article

publié par

Journal of the Optical Society of America A

Probability Imaging: the statistics of speckle patterns of
extended astronomical sources at high light level

Septembre 1991

2.4.4 Analyse au deuxième ordre de systèmes multiples — Etoile triple sur l'axe

Considérons un système de trois étoiles, chacune séparée de ses voisines d'une quantité grande devant la taille du speckle. On note α_1 le rapport d'intensité de la deuxième étoile à la première, α_2 le rapport de la troisième étoile à la première. On note d_1 le vecteur séparation entre les étoiles 1 et 2, d_2 le vecteur séparation entre les étoiles 1 et 3. Les matrices \mathbf{D} et \mathbf{R} définies aux équations 2.20 et 2.22 de l'article précédent s'écrivent dans ce cas :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \alpha_1 & \\ & & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{R}(\rho) = \begin{pmatrix} r(\rho) & r(\rho + d_1) & r(\rho + d_2) \\ r(\rho - d_1) & r(\rho) & r(\rho + d_2 - d_1) \\ r(\rho - d_2) & r(\rho + d_1 - d_2) & r(\rho) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

On se place maintenant dans le cas particulier de la figure 2.10 où les trois étoiles sont alignées et équidistantes, soit d cette distance. Les fonctions caractéristiques pour les décalages $\rho = d$ et $\rho = 2d$ s'expriment alors, en utilisant l'équation 2.25 de l'article :

$$\phi_2(\omega_1, \omega_1; d) = \frac{1}{(1 - i\omega_1)(1 - i\alpha_2\omega_2)(1 - i\alpha_1\omega_1 - i\omega_2)(1 - i\alpha_2\omega_1 - i\alpha_1\omega_2)} \quad (2.42)$$

$$\phi_2(\omega_1, \omega_1; 2d) = \frac{1}{(1 - i\omega_1)(1 - i\alpha_2\omega_2)(1 - i\alpha_2\omega_1 - i\omega_2)} \quad (2.43)$$

Pour $\rho = 2d$ la fonction caractéristique a la même expression que celle qui serait calculée pour une étoile double de rapport d'intensité α_2 et de séparation $2d$. Pour $\rho = d$ elle montre deux axes privilégiés d'équation :

$$\begin{cases} \omega_2 = -\alpha_1\omega_1 \\ \omega_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\omega_1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Les modules de ces fonctions sont représentés en figure 2.10 pour les valeurs $\alpha_1 = 0.75$ et $\alpha_2 = 3$.

On peut généraliser cette analyse à un système de N étoiles. On note $\{\alpha_i\}$ les intensités de chaque étoile. On suppose qu'il existe dans le système un nombre K de couples d'étoiles qui ont chacun la même séparation d (redondances), et que les étoiles en correspondance dans chaque couple portent les numéros $(p, p + N - K)$; par exemple pour l'étoile triple dont nous venons de parler, les couples distants de d étaient (1,2) et (2,3). On peut, toujours sous l'hypothèse que d est grand devant la taille du speckle, calculer la taille de la séparation d :

$$\phi_2(\omega_1, \omega_1; 2d) = \prod_{j=1}^{N-K} (1 - i\omega_1\alpha_j)^{-1} \prod_{m=K+1}^N (1 - i\omega_2\alpha_m)^{-1} \prod_{p=1}^K (1 - i\omega_1\alpha_{N-K+p} - i\omega_2\alpha_p)^{-1} \quad (2.45)$$

Cette fonction montrerait alors K axes privilégiés d'équation :

$$\omega_2 = -\frac{\alpha_{N-K+p}}{\alpha_p}\omega_1 \quad (2.46)$$

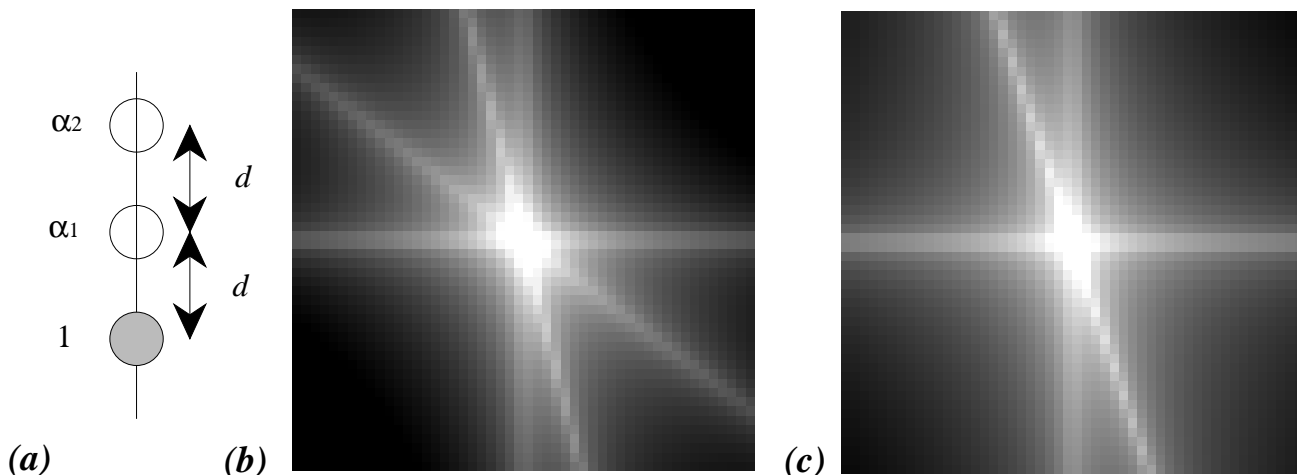


FIG. 2.10 – Fonction caractéristique au deuxième ordre d’une structure de speckles d’étoile triple bien séparée dont les composantes sont alignées et équidistantes. On a pris $\alpha_1 = 0.75$ et $\alpha_2 = 3$. En (a) on a représenté l’objet. En (b) et (c) les modules des fonctions caractéristiques correspondant à $\rho = d$ et $\rho = 2d$.

Cet exemple simple montre comment la fonction caractéristique d’ordre deux permet d’obtenir, dans le cas de systèmes d’étoiles multiples, les différentes positions et intensités des étoiles. Dans le cas particulier où le système possède des redondances pour une certaine séparation entre ses étoiles, le module de ϕ_2 montre plusieurs lignes obliques dont les pentes sont reliées de manière très simple aux rapports d’intensité des étoiles des couples redondants. Dans le cas trivial de l’étoile triple dont les composantes sont équidistantes et alignées, l’examen de la fonction caractéristique à deux décalages différents donne sans ambiguïté les rapports α_1 et α_2 .

2.5 Vers la reconstruction des images

2.5.1 Relation entre la statistique d’un objet étendu et celle de sa réponse impulsionnelle

Les limites du modèle Gaussien apparaissent dès que la longueur d’onde augmente ou quand le diamètre du télescope utilisé pour faire les images diminue. Aime et Martin [6] ont montré que ce modèle ne décrivait plus les images de speckles de façon satisfaisante dès que le rapport D/r_0 descendait en dessous de quelques dizaines. En fait, lorsque le nombre de cellules cohérentes intersectées par la pupille du télescope n’est pas très élevé, le théorème de la limite centrale ne peut plus être appliqué et la statistique des champs de tavelures n’est plus gaussienne. Elle dépend en fait de l’état de l’atmosphère au moment où l’image est formée au foyer du télescope [49, 68].

Un nouveau modèle indépendant de la statistique de l’amplitude complexe est présenté dans l’article ci-après [14]. Il montre que la fonction caractéristique des images tavelées d’un objet étendu peut s’exprimer de manière très simple à l’aide de celle de la réponse impulsionnelle dont l’estimation peut se faire sur une étoile de référence. Ce modèle est

d'autant plus intéressant qu'il permet de traiter facilement le cas de speckles obtenus par balayages d'une fente, ou le cas de speckles partiellement intégrés pour lesquels le modèle gaussien n'est pas une bonne description. Son application suppose néanmoins que la relation de convolution objet-image est vérifiée, et n'affranchit pas d'un prétraitement visant à éliminer le bruit ou la statistique des photons pour des images à faible flux.

Article

soumis à

Signal Processing

Imagerie Probabiliste : Sur l'Ordre d'Analyse d'une Structure
de Speckles en Astronomie à Haute Résolution Angulaire

Mars 1992

2.5.2 Une application au cas de ζ Aqr

Nous avons utilisé les résultats de l'article précédent sur les tavelures infrarouges de ζ Aqr qui avaient été observées par Perrier [7] au télescope de 3.60 m de l'E.S.O.. Ces données sont des balayages infrarouges du plan focal du télescope et il s'agit là d'un cas où le modèle gaussien n'est pas directement applicable. En partant de l'étoile de référence α Aqr observée dans les mêmes conditions, nous avons été en mesure de retrouver avec un accord presque parfait et en dépit des problèmes de bruit additif, la densité de probabilité d'ordre 1 de ζ Aqr.

Relation entre la densité de probabilité de l'objet et celle de sa référence

Nous sommes partis de l'équation (7) de l'article précédent :

$$\phi_Q(\{u_q\}; \{X_q\}) = \varphi_{NQ}(\{\alpha_n u_q\}; \{X_q - d_n\}) \quad (2.47)$$

en prenant ici $N = 2$ (nombre de composantes de l'objet) et $Q = 1$ (ordre d'analyse pour l'objet). La relation ci-dessus devient alors :

$$\phi_1(u, X) = \varphi_2(\alpha_1 u, \alpha_2 u; X - d_1, X - d_2) \quad (2.48)$$

où X est la position du point d'analyse, d_1 et d_2 les positions de chaque étoile du couple, et α_1 et α_2 les intensités de chaque étoile. En faisant l'hypothèse d'invariance par translation et en nommant $d = d_1 - d_2$ la séparation des étoiles, on peut écrire :

$$\phi_1(u) = \varphi_2(\alpha_1 u, \alpha_2 u; d) \quad (2.49)$$

La transformée de Fourier de cette dernière expression nous donne alors la relation qui existe entre les densités de probabilité :

$$p_1(I) = \frac{1}{\alpha_2} \int_0^{I/\alpha_1} \wp_2(x, \frac{I - \alpha_1 x}{\alpha_2}; d) dx \quad (2.50)$$

où $p_1(I)$ est la densité de probabilité d'ordre 1 de l'étoile double et $\wp_2(I_1, I_2; d)$ celle de la réponse impulsionnelle au décalage correspondant à la séparation des étoiles. Il s'agit d'une intégration sur un chemin rectiligne dans le plan (I_1, I_2) , cette opération est illustrée dans la figure 2.11. C'est en fait une projection de \wp_2 sur une droite dont la pente est l'arctangente du rapport d'intensité des étoiles α_2/α_1 .

Cas de ζ Aqr

Cette opération a été effectuée sur la densité de probabilité d'ordre 2 de α Aqr avec les paramètres suivants : $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.4$ et $d = 10$ pixels (il s'agit de données à une dimension). L'opération de projection soulève des problèmes d'interpolation assez délicats qui ont été résolus avec l'utilisation du logiciel *Mathematica* tournant sur une station de travail NeXT. La résultat est présenté dans la figure 2.12 où l'on a porté aussi la vraie densité de probabilité de ζ Aqr à des fins de comparaison : la concordance entre les deux courbes est remarquable.

FIG. 2.11 – Illustration de la relation de projection qui permet de passer du φ_2 de l'étoile de référence au p_1 de l'étoile double. Une direction est choisie dans le plan (I_1, I_2) dont l'angle est l'arctangente du rapport d'intensité des deux composantes de l'étoile double ; pour chaque point I mesuré sur cette droite, une intégration de φ_2 est effectuée dans une direction perpendiculaire (les bornes de l'intégration sont indiquées sur la figure). La valeur ainsi calculée est celle de $p_1(I)$ recherchée, à une constante multiplicative α_2 près. Il s'agit là d'une opération de projection des valeurs de $\varphi_2(I_1, I_2)$ sur la droite $I_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} I_1$.

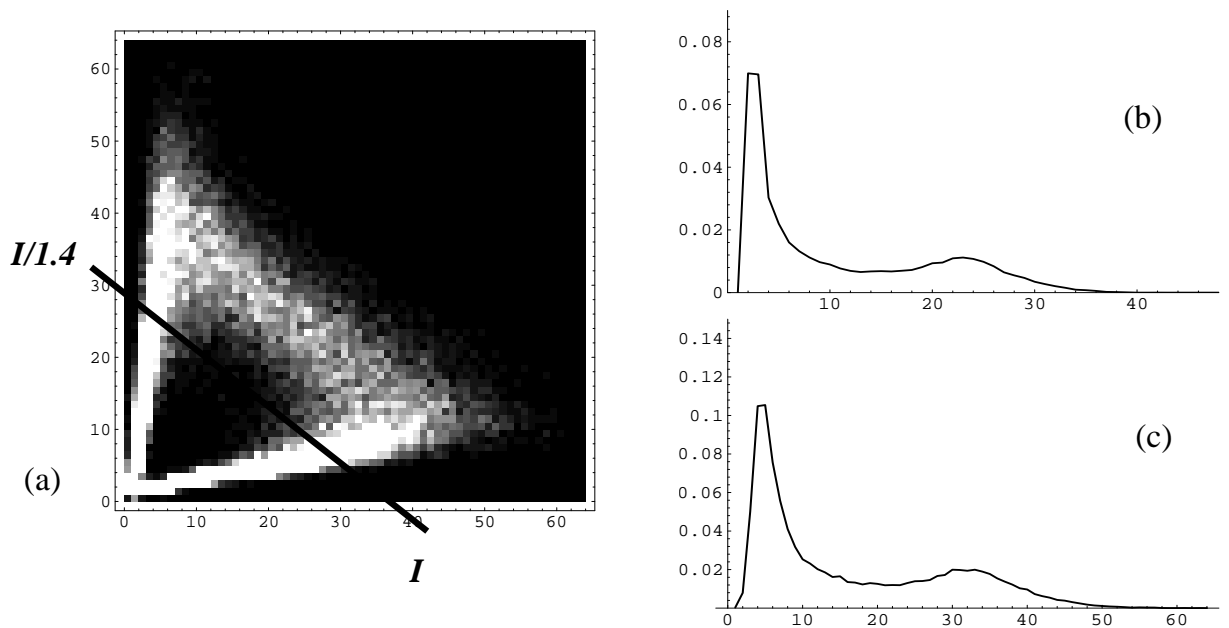


FIG. 2.12 – A gauche (a), densité de probabilité de l'étoile de référence pour le décalage 10 pixels. En surimpression: la direction de projection pour le calcul de p_1 (voir le texte). A droite (b) la densité de probabilité du premier ordre calculée par projection, et (c) celle qui est réellement observée.

2.5.3 Méthode possible de reconstruction des images

Quand on travaille sur les densités de probabilité ou sur les fonctions caractéristiques, il n'y a pas comme dans le cas des moments, de séparation simple entre une fonction dépendant de l'objet et une fonction dépendant de la réponse impulsionnelle (en speckle masking par exemple, le bispectre de l'image est le produit des bispectres de l'objet et de la réponse impulsionnelle). L'imagerie probabiliste doit donc modéliser dans son ensemble la statistique des images tavelées pour en extraire ensuite les paramètres d'un objet possible compatible avec un ensemble d'observations.

Utilisation du modèle Gaussien

Dans la première proposition de la technique [10, 12] nous envisagions d'utiliser le modèle gaussien décrit dans [9] comme point de départ d'une procédure de minimisation entre la fonction caractéristique calculée sur un ensemble de données et celle qui est obtenue à l'aide du modèle et qui dépend de l'ensemble des paramètres qui définissent l'objet. Dans l'expression de la fonction caractéristique interviennent les paramètres suivants :

- la covariance $r(x)$ de l'amplitude complexe de l'onde,
- le nombre N de points qui constituent l'objet,
- la position $\{d_n\}$ de ces points,
- la valeur de l'intensité en ces points ($\{\alpha_n\}$).

Ces quantités sont toutes inconnues *a priori*. L'estimation de N , de $\{d_n\}$ et de $\{\alpha_n\}$ constitue le processus d'imagerie proprement dit. La covariance de l'amplitude complexe dépend principalement de la pupille du télescope [32] et son expression peut être connue. Dans le cas d'un télescope circulaire nous avons vu au paragraphe 2.4.1 que c'était la racine carrée d'une fonction d'Airy. L'extension spatiale de cette fonction peut être déterminée à partir de l'autocorrélation d'une étoile servant de référence à l'objet étudié en mesurant la taille du pic speckle (dans le cas du modèle gaussien, la relation entre $r(x)$ et l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle est très simple (eq. 2.29)).

Le nombre N de points qui composent l'objet est un paramètre délicat ; il faut en fait l'estimer *avant* de commencer la reconstruction. Trois cas de figure peuvent se présenter :

1. On sait dès le départ quel type d'objet on étudie (étoile double, recherche d'une troisième composante autour d'un système binaire, etc...). N est alors connu à l'avance et le problème ne se pose pas.
2. On peut faire des hypothèses sur le nombre de points qui définissent l'objet, par exemple on reconstruit l'image de Cérès qui est un objet circulaire dont on connaît le diamètre et qui sera échantillonné par le détecteur sur un carré de $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$ pixels. A ce moment là on peut prendre pour N une valeur que l'on juge correcte (à la limite on peut légèrement surestimer N , les points "en trop" auront une intensité voisine de zéro après reconstruction).
3. On ne sait rien du tout sur l'objet : c'est le cas général. On peut alors estimer la taille de l'objet à partir de l'autocorrélation des images tavelées. Il est également possible

de prendre N comme l'une des inconnues et de reconstruire plusieurs objets de plus en plus complexes, jusqu'à atteindre le meilleur accord possible entre l'observation et le modèle.

Pour déterminer les valeurs de $\{\alpha_n\}$ et $\{d_n\}$, on choisit d'appliquer une procédure de minimisation. On peut calculer en utilisant le formalisme de l'article [9] une expression mathématique de la fonction caractéristique d'ordre Q d'un objet comprenant N points. Cette expression dépend des valeurs de $\{\alpha_n\}$ et de $\{d_n\}$. En ajustant ces paramètres de telle sorte qu'une certaine distance entre la fonction caractéristique observée et celle du modèle soit minimale, on obtiendra une collection de valeurs qui constituera un objet possible.

L'ordre Q d'analyse à utiliser pour la minimisation dépend à la fois de l'objet et des moyens de calcul dont on dispose. Nous avons pu montrer [14] que l'ordre maximal qu'il faut utiliser pour imager des objets comprenant N points est N . (un peu moins lorsque l'objet possède une géométrie particulière). Si l'on calcule la densité de probabilité d'ordre N d'un objet à N points, on peut s'attendre en généralisant le raisonnement intuitif que nous avons fait à l'ordre 2 pour une étoile double, que le graphe de P_N dans un espace à N dimensions lorsque tous les décalages correspondent aux distances entre les points de l'objet présente une direction privilégiée dont les cosinus directeurs sont les rapports d'intensité entre les différents points (ce résultat n'a toutefois pas encore été démontré de manière rigoureuse).

Si P_N et ϕ_N épuisent toute l'information imageuse, ce sont des quantités qui deviennent vite très difficiles à manipuler lorsque N augmente. Ce sont en fait des fonctions à $3N - 2$ dimensions (N valeurs de l'intensité (densité de probabilité) ou de sa variable conjuguée (fonction caractéristique) et $N - 1$ vecteurs décalages). Notre idée est de se limiter dans un premier temps à une analyse au second ordre ; nous avons vu en effet au paragraphe 2.4.4 que dans le cas d'un système d'étoiles multiples bien séparées, la fonction caractéristique d'ordre deux permet de déterminer toutes les caractéristiques de l'objet. Il est probablement plus précis d'effectuer une analyse à l'ordre trois, quatre ou plus, l'idéal étant de se placer à l'ordre qui maximise le rapport *qualité de la reconstruction/temps de calcul*. On ne sait pas actuellement comment se traduit sur l'image finale le fait d'avoir pris un ordre élevé ou non et c'est une étude qui est dans nos perspectives.

Utilisation d'une étoile de référence

D'après l'équation (7) de l'article précédent [14], la fonction caractéristique ϕ_Q d'ordre Q d'images de speckles d'un objet étendu défini sur N points s'exprime à l'aide de celle de sa réponse impulsionnelle φ_{NQ} :

$$\phi_Q(\{\omega_q\}; \{X_q\}) = \varphi_{NQ}(\{\alpha_n \omega_q\}; \{X_q - d_n\}) \quad (2.51)$$

où $\{\alpha_n\}$ représente les valeurs de l'intensité aux points $\{d_n\}$ de l'objet. L'application de ce modèle nécessite l'observation d'une étoile de référence suffisamment proche de l'objet et observée de manière suffisamment simultanée pour que les propriétés statistiques de l'atmosphères soient constantes. Les inconnues du problème sont ici :

- le nombre N de points dans l'objet,
- les valeurs $\{\alpha_n\}$,

– les valeurs $\{d_n\}$.

On remarque que toutes ces inconnues ne dépendent que de l'objet observé et qu'il n'est plus nécessaire d'estimer la covariance de l'amplitude complexe comme dans le cas du modèle Gaussien. Elle est en fait prise en compte dans la fonction caractéristique de la réponse impulsionnelle.

La méthode proposée est toujours basée sur la minimisation d'une distance entre ϕ_Q et φ_{NQ} en fonction des paramètres $\{\alpha_n\}$ et $\{d_n\}$. Le nombre N de points pourra être estimé de la manière décrite pour la cas Gaussien.

Algorithme de minimisation par recuit simulé

Le recuit simulé est une technique de type Monte-Carlo généralisé très à la mode actuellement en traitement d'images. C'est une méthode de minimisation d'une fonctionnelle (qui peut être une distance entre une observation et un modèle) qui a la propriété de converger vers le minimum global de la fonction s'il existe (refs).

Nous allons décrire la procédure de reconstruction d'un objet $O(r)$ digitalisé sur N points par minimisation d'une distance entre les fonctions caractéristiques du modèle et observée, à l'ordre deux. Soient $\{\alpha_i\}$ et $\{d_i\}$ les intensités et les positions des points de l'objet.

Si on utilise le modèle gaussien, la fonction caractéristique du modèle s'exprime [9]:

$$\phi_2(\omega_1, \omega_2; \rho) = \det^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{I} - i\omega_1 \mathbf{R}(0) \mathbf{D} & -i\omega_2 \mathbf{R}(-\rho) \mathbf{D} \\ -i\omega_1 \mathbf{R}(\rho) \mathbf{D} & \mathbf{I} - i\omega_2 \mathbf{R}(0) \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

où les notations sont celles de l'article, soit \mathbf{R} la covariance de l'amplitude complexe de l'onde, \mathbf{D} la matrice diagonale des intensités dans l'objet et \mathbf{I} la matrice unité.

Si on utilise la modèle avec étoile de référence, la fonction caractéristique est :

$$\phi_2(\omega_1, \omega_2; \rho) = \varphi_4(\omega_1, \alpha\omega_1, \omega_2, \alpha\omega_2; -d, \rho, \rho - d) \quad (2.53)$$

La procédure de reconstruction est la même que l'on utilise l'un ou l'autre de ces modèles. Soit ϕ_2^M la fonction caractéristique calculée par le modèle et ϕ_2^E celle qui est mesurée sur les données. On va ajuster les paramètres $\{\alpha_i\}$ et $\{d_i\}$ de telle sorte que la distance :

$$W(\{\alpha_i\}; \{d_i\}) = \left\| \phi_2^M(\{\alpha_i\}; \{d_i\}) - \phi_2^E \right\|^2 \quad (2.54)$$

soit minimale. L'algorithme utilise la technique de recuit simulé, il est décrit par l'organigramme de la figure 2.13.

Le choix de la fonction distance W (on dit aussi fonction de coût) est arbitraire et dépend du problème physique auquel on s'intéresse. Il peut s'agir de la norme euclidienne, c'est à dire la somme des carrés des différences point par point des deux fonctions caractéristiques :

$$W_{\text{eucl}} = \sum_{i,j} \left(\phi_2^M(i, j) - \phi_2^E(i, j) \right)^2 \quad (2.55)$$

Il peut aussi s'agir de la distance entre des fonctions qui dépendent des ϕ_2 comme le logarithme de ϕ_2 ou ϕ_2 pondérée par une certaine quantité. On peut également minimiser la différence entre les densités de probabilité. Le tout est d'utiliser une fonctionnelle qui

FIG. 2.13 – *Algorithme de recuit simulé proposé pour la minimisation des distances entre fonctions caractéristiques du deuxième ordre d'un modèle et d'une observation (reproduction d'une partie du poster présenté au colloque de l'ESO en Octobre 1991 (voir annexe 2)).*

soit physiquement acceptable et qui conduise à un minimum global le plus marqué possible. Des études sont actuellement en cours sur des simulations de tavelures d'étoiles doubles, elles sont présentées dans le paragraphe 2.5.4.

On introduit parfois en addition à la fonction de coût une fonction dite de *pénalité* pour tenir compte d'éventuelles contraintes physiques sur l'objet . La fonctionnelle à minimiser devient alors :

$$W(\{\alpha_i\}; \{d_i\}) = \left\| \phi_2^M - \phi_2^E \right\|^2 + \gamma \| C(\{\alpha_i\}; \{d_i\}) \|^2 \quad (2.56)$$

La fonction de pénalité peut être la dérivée ou la dérivée seconde de l'objet (critère de lissage). On peut aussi introduire une limitation spatiale de l'étendue de l'objet (contrainte de support), etc... Le coefficient γ est le paramètre de régularisation.

2.5.4 Etude de la fonction distance dans le cas d'une étoile double

Le rapport ci-après est une étude sur l'existence d'un minimum de la fonction distance entre les densités de probabilités expérimentale et de modèle, pour le cas d'une étoile double. Le modèle utilisé pour l'ajustement des paramètres est le modèle gaussien, les densités expérimentales ayant été obtenues sur des simulations numériques de tavelures d'étoile double.

Note

sur

L'existence d'un minimum de la fonction
de distance entre les densités de probabilité
d'une étoile double simulée et celle du modèle Gaussien

Etude préliminaire exploratoire

Minimisation de distances entre la densité de probabilité d'images simulées d'étoile double et celle du modèle Gaussien

Introduction

Nous présentons ici les résultats d'un travail en cours sur les problèmes de minimisation de distance entre modèle et observations. On suppose un ensemble d'images courtes poses d'une étoile double caractérisée par son rapport d'intensité α et son vecteur séparation d . On est capable de calculer les densités de probabilités "expérimentales" correspondant à plusieurs décalages ρ allant de zéro à la dimension des images. L'un des plans $P_{2\text{exp}}(I_1, I_2; \rho)$ montre une structure particulière : c'est celui qui correspond à $\rho = d$. Il présente une barre oblique dont l'angle avec l'axe OI_1 est l'arctangente du rapport d'intensité des étoiles. En utilisant les formules établies dans le cas du modèle gaussien, il est par ailleurs possible de calculer de manière analytique une famille de densités de probabilités d'ordre deux $P_{2\text{th}}(I_1, I_2; \tilde{d})$ pour une étoile double possédant un rapport d'intensité $\tilde{\alpha}$ et un vecteur séparation \tilde{d} . On peut alors considérer la fonctionnelle

$$W(\alpha, \tilde{\alpha}; d, \tilde{d}) = \left\| P_{2\text{exp}}(I_1, I_2; d, \alpha) - P_{2\text{th}}(I_1, I_2; \tilde{d}, \tilde{\alpha}) \right\|^2 \quad (2.57)$$

où la quantité $\|\bullet\|^2$ représente une distance qui peut être simplement un écart quadratique moyen. Pour un jeu d'observation donné, les valeurs de α et de d sont fixées et la fonctionnelle W ne dépend que de $\tilde{\alpha}$ et de \tilde{d} . Si on suppose pour simplifier que la direction du vecteur séparation d est connue, $W(\tilde{\alpha}, \tilde{d})$ est une fonction bidimensionnelle dont le graphe doit présenter un creux bien marqué pour $\tilde{\alpha} = \alpha$ et $\tilde{d} = d$ (voir la figure 0). Idéalement ce creux est nul pour des images parfaitement gaussiennes et en l'absence de bruit.

Il est possible d'étudier le comportement de la fonction distance W sur des images d'étoiles doubles simulées numériquement ; on connaît alors la séparation et le rapport de magnitude expérimentaux et l'on peut étudier une famille de fonctions W pour voir celle qui donne le minimum le plus marqué. C'est l'objet de l'étude qui est présentée ci-après. En fait nous avons étudié les coupes monodimensionnelles $f(\tilde{\alpha})$ et $g(\tilde{d})$ de la fonction $W(\tilde{\alpha}, \tilde{d})$ pour $\tilde{\alpha} = \alpha$ et pour $\tilde{d} = d$.

Recherche du minimum suivant le rapport d'intensité α

La méthode adoptée a été la suivante :

- Simulation de speckles d'étoiles doubles avec un rapport d'intensité α et une séparation d . Le vecteur séparation a été choisi suivant l'axe Ox de l'image. On disposait ici de deux jeux de données
- Calcul de la densité de probabilité d'ordre deux "expérimentale" pour ρ (le décalage) égal à la séparation des étoiles
- Génération d'un ensemble de ddp d'ordre 2 calculées par le modèle gaussien pour un rapport $\tilde{\alpha}$ variant entre deux valeurs extrêmes. On a utilisé pour le calcul l'expression approchée (équation 2.34 de la thèse) correspondant à des étoiles bien séparées (d très supérieur à la taille du speckle).
- Comparaison entre la ddp simulée et les différentes fonctions calculées précédemment pour plusieurs valeurs de $\tilde{\alpha}$. On devrait voir apparaître un minimum lorsque $\tilde{\alpha} = \alpha$.

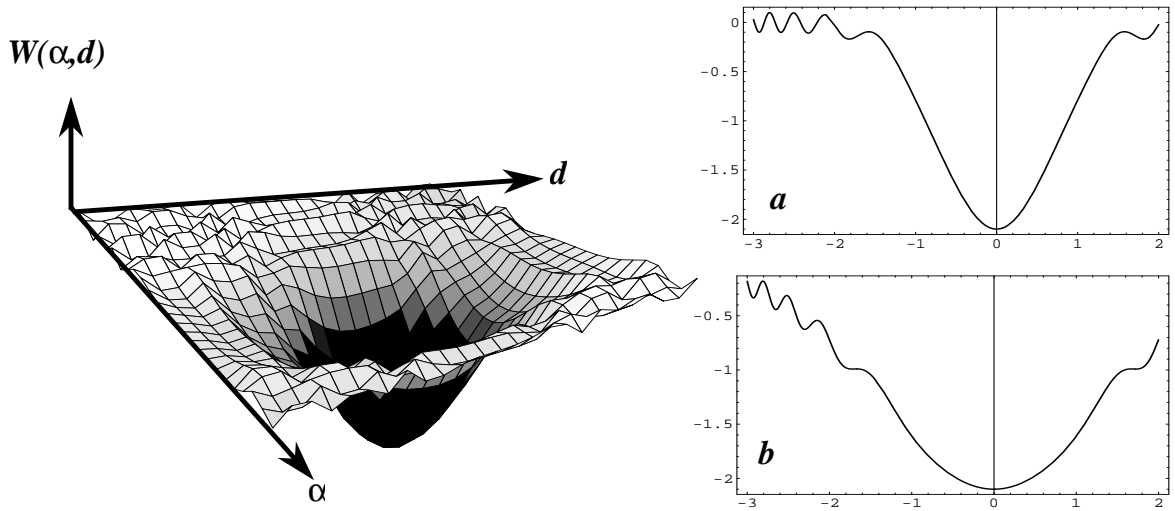


Figure 0 : Représentation en perspective d’une fonction possible de distance $W(\tilde{\alpha}, \tilde{d})$ présentant un creux très important pour $\tilde{\alpha} = \alpha$ et $\tilde{d} = d$. Les deux courbes de droite représentent la coupe $W(\alpha, \tilde{d} = d)$ (a) et la coupe $W(\tilde{\alpha} = \alpha, d)$ (b). Cette fonction W a été fabriquée pour faire apparaître un minimum très marqué qui est en fait assez peu réaliste.

Premier jeu de données

Nous avons simulé 153 images de speckles d’étoile double pour une turbulence relativement faible ($D/r_0 = 8$). La séparation du couple est de $d = 8$ pixels, le rapport d’intensité est de 0.5. La taille des images est de 64 par 64 et la taille du speckle est de deux pixels.

De gros problèmes sont apparus au début à cause de l’étendue finie de l’enveloppe des speckles sur les images simulées (ces images sont reproduites en figure 1). Les valeurs de la densité de probabilité sur les axes $I_1 = 0$ et $I_2 = 0$ étaient beaucoup trop élevées par rapport à celles prévues par le modèle gaussien ; aussi avons nous choisi de pondérer les densités de probabilités par $I_1 I_2$ pour diminuer l’influence des axes et du bruit qui est important pour les faibles valeurs de l’intensité. La fonctionnelle qui a été testée pour ce jeu de données est :

$$W(\tilde{\alpha}) = \sum_{I_1, I_2} \left(\frac{I_1 I_2 P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) - I_1 I_2 P_{2\text{th}}(I_1, I_2; \tilde{\alpha})}{P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) - P_{2\text{th}}(I_1, I_2; \tilde{\alpha})} \right)^2 \quad (2.58)$$

La courbe de distance est reproduite en figure 2 en fonction de l’arctangente du rapport de magnitude (c’est en fait l’angle que fait la droite $I_1 = \tilde{\alpha} I_2$ dans le plan (I_1, I_2)). Elle montre un minimum très marqué pour la valeur $\tilde{\alpha} = 0.48$, soit 4 % d’erreur, ce qui est de l’ordre des précisions typiques obtenues en speckle masking.

La courbe de la figure 2 a en fait été obtenue après passage d’un filtre médian de taille 3×3 pixels sur la densité de probabilité simulée. La figure 3 montre l’effet du passage de ce filtre sur les courbes des densités de probabilités et la figure 4 montre l’amélioration qu’apporte le filtre sur la courbe de distance.

Deuxième jeu de données

On dispose cette fois de 100 tavellogrammes d’étoile double, la turbulence est un peu plus forte ($D/r_0 = 15$). Les paramètres de l’étoile double sont : séparation=5 pixels, rapport de magnitude=0.5. La taille des images est de 128×128 et celle du speckle est de 3 pixels.

En figures 5 et 6 on a représenté l’une des images speckles et les densités de probabilité correspondant aux décalages $\rho = 0$ à 8. On remarque au passage que pour $\rho = 5$ pixels, la structure

caractéristique en épi apparaît, signature de l'étoile double. La figure 8 montre la ddp correspondant au décalage 5 pixels, et la courbe théorique calculée qui donne qui donne une distance minimale.

Diverses fonctions de distance ont été essayées sur ce jeu de données :

- l'écart quadratique simple :

$$W_1 = \left\| P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) - P_{2\text{th}}(I_1, I_2) \right\|^2$$

- la distance entre les ddp multipliées par $I_1 I_2$:

$$W_2 = \left\| I_1 I_2 P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) - I_1 I_2 P_{2\text{th}}(I_1, I_2) \right\|^2$$

- la distance entre les ddp multipliées par la distance à l'origine $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$:

$$W_3 = \left\| \sqrt{I_1^2 + I_2^2} P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) - \sqrt{I_1^2 + I_2^2} P_{2\text{th}}(I_1, I_2) \right\|^2$$

- la distance entre les ddp pondérées par l'inverse de leur logarithme népérien (c'est une quantité qui ressemble à l'entropie) :

$$W_4 = \left\| P_{2\text{exp}}(I_1, I_2) \log(1/P_{2\text{exp}}(I_1, I_2)) - P_{2\text{th}}(I_1, I_2) \log(P_{2\text{th}}(I_1, I_2)) \right\|^2$$

La quantité $\|\bullet\|^2$ signifiant tantôt un écart quadratique simple $\sum (f(P_{2\text{th}}) - f(P_{2\text{exp}}))^2$, tantôt un écart pondéré $\frac{\sum (f(P_{2\text{th}}) - f(P_{2\text{exp}}))^2}{\sum (P_{2\text{th}} - P_{2\text{exp}})^2}$, $f(P_2)$ désignant la fonction de P_2 choisie pour calculer la distance (pondération). Cette pondération doit permettre de sélectionner l'information pertinente contenue dans la densité de probabilité, en minimisant autant que possible le bruit ou le fond du ciel. En fait, il faut choisir une fonction qui donne un poids relativement faible aux axes, soit aux valeurs faibles de l'intensité qui contiennent peu d'information. Toutes les pondérations que nous avons choisies sont par conséquent des fonctions croissantes de I_1 et de I_2 .

Les courbes correspondant aux distances W_2 et W_3 sont reportées en figure 9, celle correspondant à l'“entropie” pondérée par la distance à l'origine est présentée en figure 10. Les minima des courbes se situent vers l'angle 35 degrés, soit une valeur de $\alpha = 0.7$ ce qui est un peu trop élevé ; le minimum est néanmoins présent et relativement bien marqué.

Il semble en fait que toutes les distances donnent *grosso modo* le même résultat, c'est à dire un minimum qui est plus ou moins bien marqué. Les fonctions qui semblent donner les meilleurs résultats sont celles qui font intervenir une pondération de type $\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$ ou $I_1 I_2$ qui privilégie les grandes valeurs de l'intensité. L'entropie, qui fait intervenir une pondération de la ddp par l'inverse de son logarithme, a donné des résultats intéressants.

Recherche du minimum suivant la séparation d

Méthode :

- Simulation de speckles d'étoiles double comme dans le cas précédent
- Calcul de plusieurs ddp “expérimentales” correspondant à des valeurs de ρ qui encadrent la valeur de la séparation des étoiles ($\rho=0$ à 8).
- Génération d'une ddp théorique calculée par le modèle gaussien pour $\tilde{\alpha}$ égal au rapport d'intensité des étoiles. On utilise en fait l'expression simplifiée de P_2 valable lorsque la séparation est grande devant la taille du speckle (équation 2.34).

- Calcul de la distance entre la ddp théorique et les “expérimentales”. On devrait ici obtenir un minimum lorsque ρ est égal à la séparation des étoiles.

On a utilisé pour ce calcul le deuxième jeu de données avec les mêmes paramètres pour l'étoile double. La courbe de distance est reproduite en figure 11 (la distance choisie est W_3). Il semble en fait que quelle que soit la fonctionnelle minimisée dans ce cas, les courbes sont pratiquement identiques et montrent un minimum très bien marqué à la séparation des étoiles. Le paramètre séparation ne semble donc pas être très sensible, en tout cas moins que le paramètre différence de magnitude.

Conclusion

Les courbes qui ont été présentées n'ont bien entendu qu'une valeur d'illustration ; elles montrent néanmoins que la fonction distance entre la ddp d'ordre deux d'images d'étoile double simulées et calculées d'après le modèle gaussien présente un minimum pour certaines valeurs de la séparation et du rapport de magnitude entre les étoiles. Ce minimum est en général assez large et profond et il ne semble pas y avoir de minima secondaires importants ; une technique de type Monte-Carlo ou recuit simulé pourra probablement donner de bons résultats dans ce cas. Nous envisageons pour la suite de calculer les densités de probabilité théoriques en utilisant le P_3 d'une étoile de référence comme il est décrit dans l'article [14]. Ce qui devrait donner de meilleurs résultats puisqu'on utiliserait alors la statistique exacte des champs de speckles au lieu du modèle gaussien.

Chapitre 3

Influence du bruit — Détection en comptage de photons

Nous venons de décrire la technique d'imagerie probabiliste telle que nous la concevons actuellement. Elle fait intervenir l'ajustement à un modèle d'une collection de valeurs décrivant un objet astronomique observé. Mais il est rare que les données provenant d'une observation soient parfaites. Dans le domaine visible les objets étudiés ont souvent une intensité très faible et la détection intervient photon par photon. La statistique des photons et les capteurs à comptage introduisent divers biais et distorsions sur les densités de probabilité. En infrarouge la présence de rayonnement thermique gêne considérablement les observations et n'est pas rare que le bruit y soit aussi important que le signal observé. Pour pouvoir appliquer idéalement l'imagerie probabiliste il est nécessaire de travailler sur des données aussi propres que possible : il faut donc bien connaître les perturbations subies par les densités de probabilité lorsqu'on passe du cas idéal aux observations réelles, et mettre en place des algorithmes de correction.

Deux cas sont considérés dans ce chapitre essentiellement composé d'articles : la présence de bruit additif indépendant du signal astronomique (c'est le cas d'observations en infrarouge) et la détection en comptage de photons (incluant les problèmes dus aux capteurs comme le trou du centreur ou le clipping).

3.1 Cas du bruit additif

On suppose que l'observation se fait en présence d'un bruit $B(r)$ qui vient s'ajouter au signal astronomique $S(r)$ pour donner une intensité observée $M(r)$ à une position r du plan focal du télescope :

$$M(r) = S(r) + B(r) \quad (3.1)$$

On suppose que $S(r)$ et $B(r)$ sont statistiquement indépendants. En notant \mathbf{M} le vecteur qui représente la collection de valeurs de $M(r)$ aux points de l'image représentés par le vecteur \mathbf{R} et $E[f]$ l'espérance mathématique d'une fonction f , la fonction caractéristique observée $\phi_Q(\mathbf{U}; \mathbf{R})$ s'écrit :

$$\phi_Q(\mathbf{U}; \mathbf{R}) = E \left[e^{i\mathbf{U} \cdot \mathbf{M}} \right] = E \left[e^{i\mathbf{U} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{B})} \right] = E \left[e^{i\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}} \right] E \left[e^{i\mathbf{U} \cdot \mathbf{B}} \right] \quad (3.2)$$

Le bruit additif se traduit par une multiplication simple des fonctions caractéristiques du signal et du bruit, et par une convolution de leurs densités de probabilité. Une procédure

inverse doit être envisagée pour retrouver la fonction caractéristique de $S(r)$ qui nécessite l'estimation du bruit (facile à obtenir en masquant l'ouverture du télescope).

L'article ci-après [67] présente l'application de la méthode de déconvolution de Richardson-Lucy au cas des densités de probabilité de l'étoile double ζ Aqr observée en infrarouge par Perrier avec le télescope de 3.60 m de l'ESO [7]. Nous envisageons aussi l'application des techniques de recuit simulé ; un programme est actuellement en cours d'élaboration sur un ordinateur parallèle "Connection Machine" [37].

Article

soumis à

Journal of the European Optical Society A

Application of the Richardson-Lucy algorithm to the
deconvolution of two-fold Probability Density Function

Février 1992

3.2 Détection des images en comptage de photons

A très faible éclaircissement, la détection de la lumière est quantique ; les photons arrivent les uns après les autres sur le capteur au foyer du télescope, d'autant plus nombreux que la source est plus brillante. La figure de speckles d'une étoile observée à fort flux présente des variations de lumière (les tavelures) qui affectent le nombre de photons détectés : l'image devient un ensemble de points dont la densité est modulée par l'intensité à fort flux. Le nombre N de photons reçus pendant un temps t lorsqu'on observe une source d'intensité I suit une loi de Poisson :

$$P(N|I) = \frac{(\alpha I)^N}{N!} e^{-\alpha I} \quad (3.3)$$

où α est le rendement quantique du capteur. Si I est une fonction aléatoire comme c'est le cas pour des images speckle, alors la détection des photons devient un processus doublement stochastique qui suit la loi :

$$p(N) = \int_{I=0}^{\infty} P(N|I) P(I) dI = \int_{I=0}^{\infty} \frac{(\alpha I)^N}{N!} e^{-\alpha I} P(I) dI \quad (3.4)$$

Cette relation connue sur le nom de transformation de Poisson a été introduite par Mandel en 1959 [59]. Pour le modèle Gaussien, elle se ramène à la loi de Bose-Einstein ($P(I)$ étant la densité de probabilité exponentielle présentée au paragraphe 2.4.1) :

$$p(N) = \frac{(\alpha I)^N}{(1 + \alpha I)^{N+1}} \quad (3.5)$$

Des progrès considérables sur la statistique de la détection des photons ont été effectués depuis les travaux de Mandel, parmi lesquels on peut citer ceux de Mehta [61]. D'excellentes présentations se trouvent dans [32, 42, 71].

L'équation 3.4 est la relation qui affecte les densités de probabilités lorsqu'on passe d'une détection à fort flux à une détection en comptage de photons. Elle ne fait pas apparaître de séparation simple entre la statistique de l'intensité et celle des photons comme dans le cas du bruit additif. Divers essais d'inversion de la transformation de Poisson sont présentés dans les articles ci-après dans le cas de densités de probabilité du premier ordre [10, 12] (voir aussi l'annexe 2). On procède soit à l'inversion directe par une méthode itérative, soit à l'utilisation de relations particulières entre les densités de probabilité en comptage de photon et les grandeurs statistiques à fort flux. Nous sommes actuellement en train de travailler sur l'inversion à l'ordre deux.

Communication

présentée à

*ICO Topical Meeting on Atmospheric, Volume and Surface
Scattering and Propagation*

Probability Imaging of Extended Astronomical Sources at
Low Light Levels

Florence, 27–31 Août 1991

Communication

présentée à

ESO Conference on High Resolution Imaging by Interferometry II

Probability imaging photon counting levels

Garching, 14–18 Octobre 1991

3.2.1 Influence du biais dû à la statistique des photons et problèmes de capteur

La détection en comptage de photons conserve à un biais près la relation de convolution objet-image, base de toutes les techniques d'imagerie. Ce biais apparaît sur les densités spectrales comme un plateau presque uniforme de valeur [34, 42] :

$$B = \frac{1}{1 + \langle K \rangle} \quad (3.6)$$

si $\langle K \rangle$ est le nombre moyen de photons dans l'image et si les densités spectrales sont normées. Un biais similaire apparaît sur le bispectre [79], biais qui doit être compensé lorsque l'on veut faire de l'imagerie par speckle masking [78].

Il existe d'autres effets indésirables qui sont peut-être produits par les détecteurs à comptage de photons. Le plus célèbre est sans doute le "trou du centreur" provoqué par la taille finie des impacts individuels des photons et qui empêche la discrimination de deux photons simultanés très proches. L'autre est dû à la détection en "tout ou rien" et conduit à une saturation à 1 du nombre de photons détectés sur une image (le *clipping*). Une étude de ces effets et l'influence du biais de la statistique des photons présentée est dans les différents articles ci-après.

Le premier article [8] est une communication présentée au colloque SPIE de San-Diego en Juillet 1990. Il résume en fait les travaux de l'équipe à cette époque. Les aspects comptage de photons sont décrits au paragraphe 4 avec la présentation de densités de probabilité affectées par une transformation de Poisson, pour le point source et l'étoile double. Le problème du clipping y est également abordé.

La courte communication suivante (colloque ICO, Août 1991) présente les effets du clipping sur les densités spectrales en utilisant une description analytique par le modèle Gaussien et des simulations.

Ces résultats sont repris beaucoup plus en détail dans l'article présenté après, soumis à *Experimental Astronomy*.

La communication suivante (colloque ESO, Octobre 1991) présente les effets du clipping sur la triple corrélation. Le problème du biais y est aussi abordé et l'on montre que l'utilisation des cumulants permet de s'en affranchir totalement.

Enfin, le dernier article, récemment accepté par le *Journal of Optical Society of America A*, reprend une formulation générale et synthétique de tous ces problèmes de biais. L'article soumis à *Experimental Astronomy* est antérieur celui accepté par *JOSA*. Il sera en fait profondément remanié. Les aspects théoriques —tous contenus dans l'article *JOSA*— seront réduits au minimum. L'accent sera mis sur la simulation numérique, qui sera l'étude de la triple corrélation.

Communication

présentée à

Digital Image Synthesis and Inverse Optics — S.P.I.E.

Second order statistics of astronomical speckle pattern used
for image reconstruction

San-Diego, 9–13 Juillet 1990

Communication

présentée à

*ICO Topical Meeting on Atmospheric, Volume and Surface
Scattering and Propagation*

Effects of Clipped Photon Detection in Speckle
Interferometry

Florence, 27–31 Août 1991

Article

soumis à

Experimental Astronomy

The effects of clipped photon detection in Labeyrie's speckle
interferometry technique

Mai 1991

(en cours de révision)

Communication

présentée à

ESO Conference on High Resolution Imaging by Interferometry II

Effects of clipped photon detection in the triple correlation
technique

Garching, 14–18 Octobre 1991

Article

accepté par

Journal of the Optical Society of America A

A statistical approach to bias effects in the techniques of
speckle interferometry and speckle masking

Décembre 1991

Chapitre 4

Une application astrophysique sur des images tavelées de quelques étoiles doubles

L'observation de l'étoile ζ Aqr en infrarouge fut le premier résultat de l'imagerie probabiliste en 1990. Cette étoile avait été observée par balayage d'une fente dans le plan focal. Les speckles étaient intégrés le long de la direction de la fente et les images obtenues étaient monodimensionnelles. Nous sommes aujourd'hui en possession d'images à deux dimensions d'étoiles doubles dans le domaine visible. Ces images nous ont été fournies par A. Glindemann en Octobre dernier, et les premières densités de probabilité d'ordre deux calculées sur les images de ces étoiles montrent des structures caractéristiques des étoiles doubles. Il s'agit là des premiers résultats de l'imagerie probabiliste dans le visible.

4.1 Les observations

Elles ont été effectuées par des équipes Japonnaises (universités de Tokyo, de Shizuoka et d'Hokkaido à la fin du mois d'Octobre 1988 [45, 46]. Ils ont utilisé une caméra TV intensifiée placée au foyer cassegrain du télescope de 212 centimètres de l'observatoire "San Pedro Martir" de l'université de Mexico (focale de 15.8 mètres). Les images étaient grossies 10 fois par un objectif de microscope et le champ observé était de $4''53 \times 4''53$. Un pixel correspond dans le ciel à $0''035$. Les étoiles ont pour la plupart été observées en lumière blanche avec un prisme correcteur pour compenser la dispersion atmosphérique. La cadence des prises de vue était de 60 Hz et nous disposons d'un peu moins d'une centaine d'images à courte pose de chaque objet. Les intensités sont digitalisées sur 256 niveaux sur des images de 128×128 pixels.

Les étoiles doubles observées sont les suivantes :

Nom	Nombre d'images	Séparation (secondes d'arc)	m ₁	m ₂
ADS 2253	73	0.48	7.5	7.5
ADS 2980	73	0.50	8.2	8.2
ADS 3390	73	0.88	8.6	8.6
ADS 15267	73	0.27	8.1	8.2
ADS 15281	73	0.17	4.7	5.0
ADS 15992	63	0.43	8.5	9.0
ADS 16836	73	0.50	5.7	5.8

L'étoile simple HD 28142 a aussi été observée avec le même système et pourra nous servir d'étoile de référence pour un traitement plus approfondi.

4.2 Examen des densités de probabilité au premier ordre

La figure 4.1 présente les densités de probabilité $P(I)$ de chaque étoile double et de l'étoile de référence calculées comme des histogrammes des ensembles d'images. On se souvient que sous l'hypothèse gaussienne, la densité de probabilité pour une étoile double est une fonction qui présente un maximum à la valeur :

$$\frac{I}{\langle I \rangle} = \frac{\alpha \log \alpha}{\alpha - 1} \quad (4.1)$$

où α est le rapport d'intensité des étoiles. Celle de la réponse impulsionnelle est simplement une exponentielle décroissante :

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (4.2)$$

4.2.1 L'étoile de référence

L'histogramme des images de l'étoile de référence des reproduit sur la figure 4.1. On remarque qu'il présente une zone assez linéaire sur sa plus grande partie, en bon accord avec le modèle gaussien, ce qui n'était pas évident *a priori* au vu de la large bande passante utilisée (la figure est en échelle logarithmique). Il y a par contre une remontée très nette quand on se rapproche de l'origine. Cette remontée peut être due à l'extension finie des champs de speckles qui sont, sur les images, entourés d'une zone de fond de ciel qui contribue de manière significative aux faibles valeurs de l'intensité. Si la densité de probabilité avait été calculée sur une zone réduite des images, cette remontée aurait sans doute été fortement atténuée. On remarque aussi que le maximum de la fonction n'est pas pour $I = 0$ comme on aurait pu s'y attendre, mais il semble exister un offset qui décale globalement toutes les valeurs de l'intensité et trahit peut-être la présence d'un bruit additif. Le comportement de la courbe pour ces tout premiers points peut aussi être dû à des problèmes de flat-field ou toute autre cause inconnue. Ce comportement était en tout cas observé sur l'étoile ζ Aqr en infrarouge [7] et manifestait ainsi la présence d'un bruit additif très important. On ne dispose malheureusement pas d'images de fond de ciel

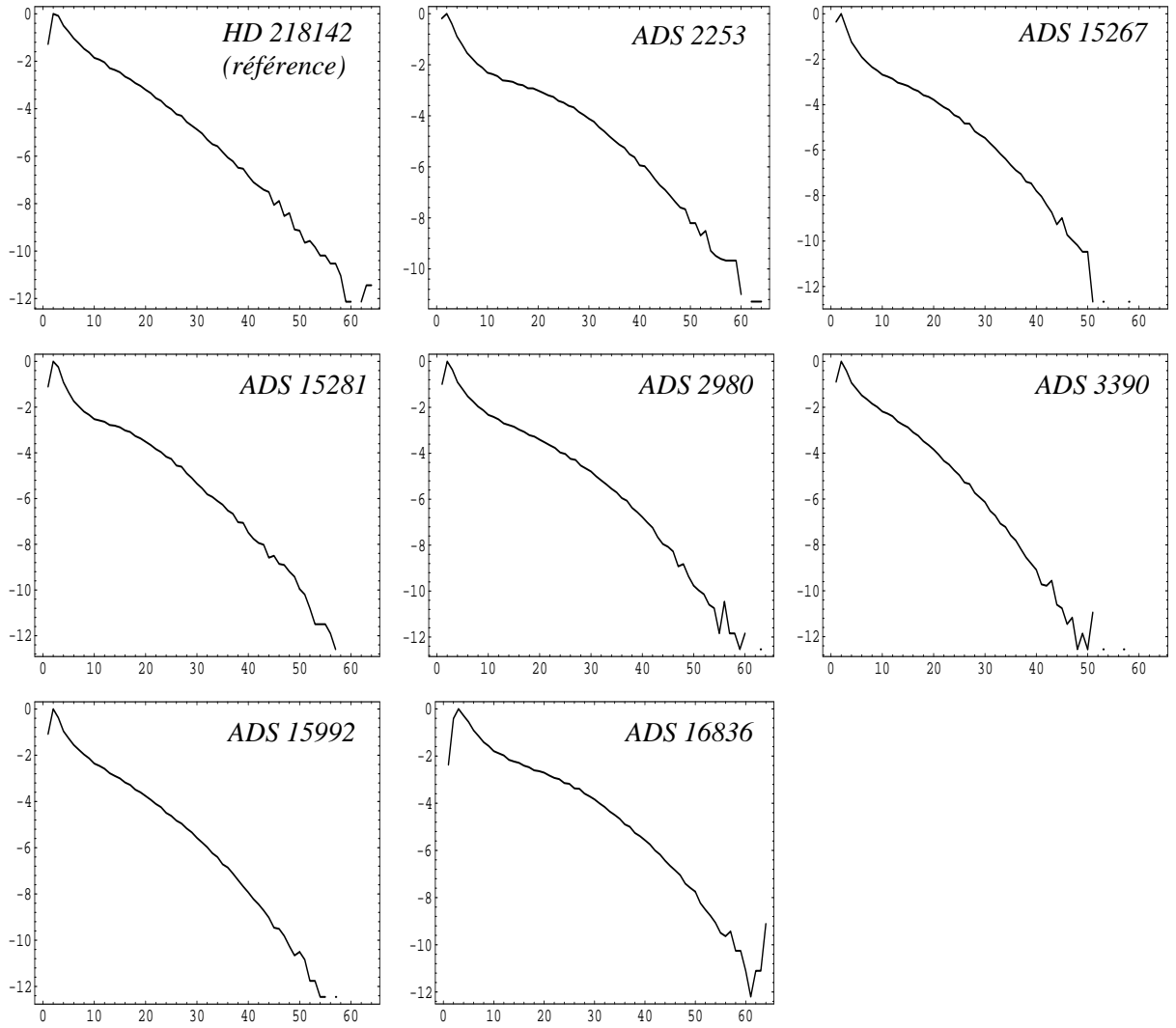


FIG. 4.1 – Densités de probabilité du premier ordre des étoiles doubles et de l'étoile de référence. L'échelle en ordonnée est logarithmique, celle des abscisses est graduée en valeurs de l'intensité digitalisée de 0 à 63.

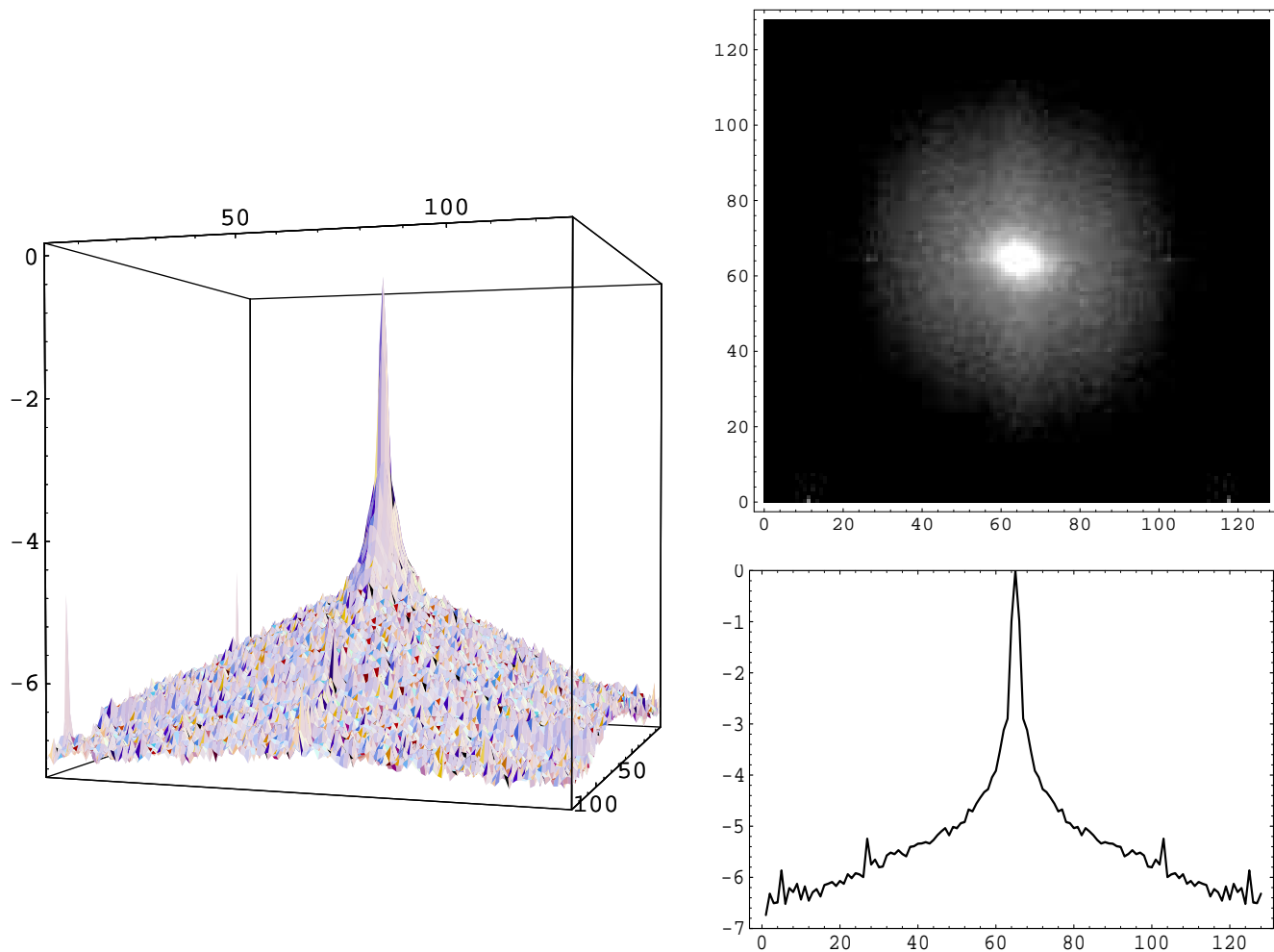


FIG. 4.2 – *Densité spectrale de puissance de l'étoile de référence HD 218142. A gauche, représentation en perspective cavalière. En haut à droite, représentation en échelle de gris ; et en bas à droite, on a effectué une coupe suivant la direction Ox . Les courbes sont représentées en échelle logarithmique*

qui nous permettraient d'estimer la statistique du bruit. On peut cependant en avoir une première approximation en l'estimant sur des zones en bordure d'image loin des speckles. La présence d'un tel bruit se traduirait par une convolution des densités de probabilité du signal et du bruit.

La densité spectrale des images de l'étoile de référence a été représentée en figure 4.2. Il semble que le plateau des hautes fréquences soit affaibli d'un facteur proche du million par rapport à la fonction de transfert hors atmosphère. Cette valeur correspondrait à un paramètre r_0 de deux millimètres qui n'est pas très réaliste. Cependant il faut tenir compte du fait que le temps d'intégration de 1/60ème de seconde peut suffire à brouiller les images si la turbulence est forte (c'est d'ailleurs ce que semble montrer l'examen visuel des images) et que la bande passante utilisée était large.

Il est par contre intéressant de constater l'absence du biais qui caractérise le comptage de photons. Ce biais ayant pour valeur $1/(1 + \langle K \rangle)$ où $\langle K \rangle$ est le nombre moyen de

photons par images, on peut en déduire que les images contiennent plus de dix millions de photons et peuvent donc être considérées comme des images à fort flux. Une procédure de transformation inverse de Poisson n'est pas nécessaire dans ce cas.

4.2.2 Les étoiles doubles

En première constatation on s'aperçoit que l'on observe pas comme on s'y attendait, le graphe en forme de bosse avec un maximum bien marqué, signature d'une étoile double. Par contre on peut voir un léger épaulement sur les courbes, notamment sur celles de ADS 2253 et de ADS 15281. La courbe présente en fait trois régions bien différenciées comme illustré par le schéma ci-dessous :



La région 1 traduit un problème d'offset similaire à celui qui avait été rencontré pour l'étoile de référence. La région 2 est probablement due à l'influence d'une zone de fond de ciel autour de l'enveloppe des speckles sur les images et qui fait monter les premiers points. La région 3 ressemble à une partie de la distribution prévue par le modèle gaussien pour une étoile double : l'épaulement correspondrait alors à la partie sommitale de cette distribution, éventuellement élargie par une réponse impulsionnelle de bruit additif.

4.3 Examen étoile par étoile

Pour chacune des étoiles étudiées on a représenté dans une même planche les quantités suivantes :

- une série de quatre images instantannées,
- la densité spectrale bidimensionnelle,
- une coupe de celle-ci selon l'axe Ox ou Oy suivant le cas,
- la densité de probabilité au second ordre de l'étoile double au décalage pondérée par le produit des intensités $I_1 I_2$,
- la densité de probabilité de l'étoile de référence au décalage, même pondération.

Les décalages ont été estimés à l'aide des pics secondaires de l'autocorrélation bidimensionnelle des images. Les planches sont reproduites dans les pages ci-après. Nous allons en faire une description cas par cas dans les lignes qui suivent.

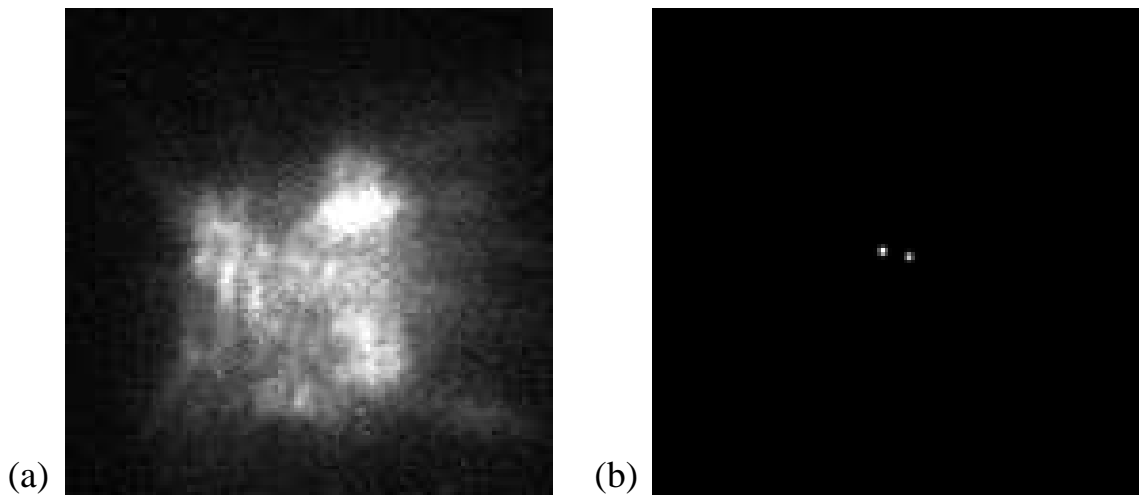


FIG. 4.3 – Images de l'étoile double ADS 15281. A gauche (a) une image courte pose obtenue au foyer du télescope de 2 mètres, à droite (b) l'image limitée par la diffraction reconstruite à partir des mesures de position et de brillance faites par imagerie probabiliste. Les valeurs trouvées sont: rapport d'intensité = 0.8 (l'étoile la plus faible est à droite) et séparation = 0.21". Les étoiles ont été synthétisées comme des gaussiennes dont la dimension est égale au diamètre de la tache d'Airy du télescope. Précisons qu'il ne s'agit là que d'un prétraitement des données et que des valeurs plus précises devraient être obtenues par la suite.

ADS 15281

C'est peut-être le résultat le plus spectaculaire. La duplicité du couple est déjà visible sur les images de speckles. La densité spectrale montre des franges bien dessinées.

Les densités de probabilité au deuxième ordre à la séparation montrent des structures assez différentes; alors que la figure correspondant à l'étoile de référence présente la structure symétrique habituelle, celle de l'étoile double présente une barre oblique de pente inférieure à celle de la première diagonale. Cette pente correspond à un rapport d'intensité de l'ordre de 0.8, la valeur réelle étant de 0.76. L'image du couple a été resynthétisée à partir des paramètres décalage et rapport d'intensité. Cette image est présentée en figure 4.3.

ADS 2253

Cette étoile est un peu plus séparée que la précédente (0"48 au lieu de 0"17) et les franges qui strient le spectre de puissance sont nombreuses. On distingue l'étoile double sur l'une des images (celle qui se trouve en haut à droite). La densité de probabilité de l'étoile double est là encore assez différente de celle de l'étoile de référence, bien qu'on n'observe pas comme tout à l'heure de barre oblique clairement définie (qui devrait avoir un angle de 45° dans ce cas). En fait on constate la présence d'une "masse" importante centrée aux valeurs $\mathbf{I} = (20, 15)$ de l'intensité digitalisée, qui pourrait être cette barre oblique convoluée par une réponse impulsionnelle de bruit. Il ne faut pas oublier non plus que la statistique gaussienne correspond à des conditions idéales (monochromatisme parfait, temps de pose

inférieur à la durée de vie des speckles) qui ne sont pas forcément vérifiées ici.

ADS 16836

Il s'agit là encore à une binaire bien séparée ($0''5$) qu'on voit nettement sur les images; La densité de probabilité de l'étoile double présente le même type de structure que pour ADS 2253 avec notamment la présence d'un creux centré sur les valeurs $\mathbf{I} = (10, 10)$ qui n'est pas observé pour l'étoile de référence.

ADS 15267 et ADS 15992

On observe pour ces deux étoiles des densités de probabilité (pour leurs décalages respectifs) qui se ressemblent beaucoup. En fait, bien qu'une barre oblique ne soit toujours pas observée clairement ici, sauf peut-être pour ADS 15267, la densité de probabilité de l'étoile double présente une dissymétrie beaucoup plus marquée que pour l'étoile de référence.

ADS 2980

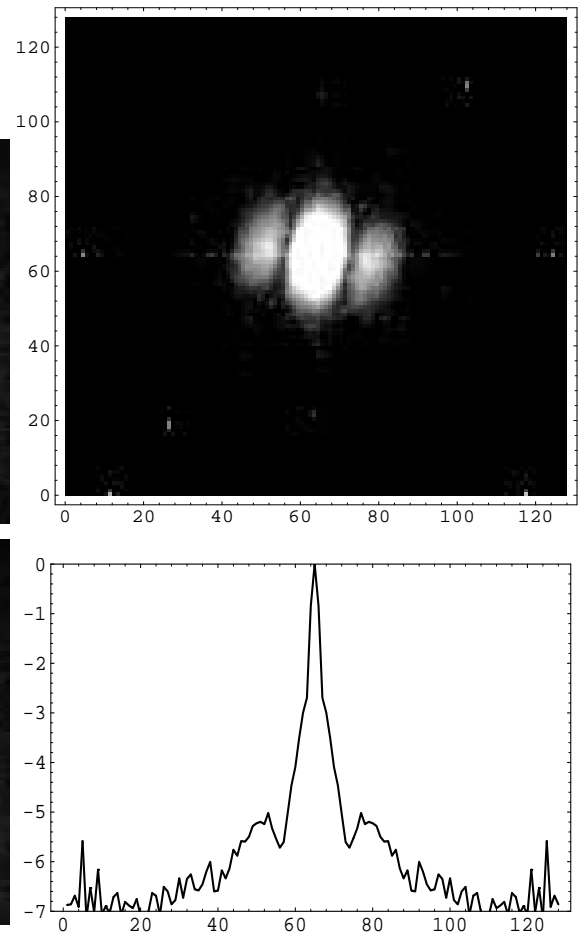
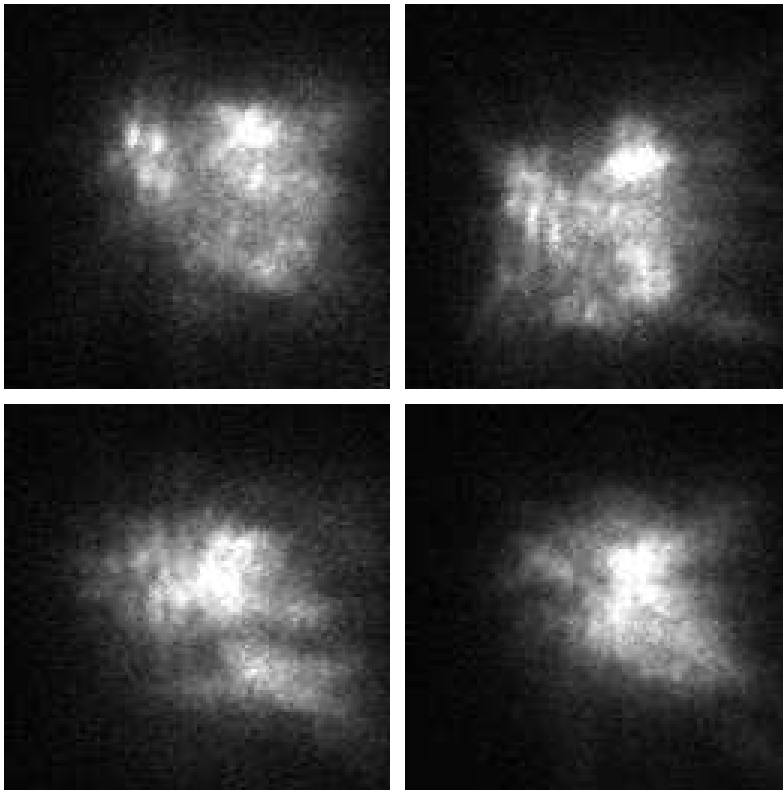
La densité de probabilité montre une structure en triangle évidé un peu semblable à celle d'ADS 16836. Les images instantannées semblent tout de même assez bruitées et l'étoile double y est difficilement discernable.

ADS 3390

Ici, la binaire est très bien séparée ($0''88$) comme en témoigne le nombre de franges observées dans le spectre. Le décalage spatial entre les deux étoiles est ici très important, près de 70 pixels, soit plus de la moitié de l'image. Le calcul de la densité de probabilité pour les grands décalages pose le problème des bords des images. En effet, si $N \times N$ est le nombre de pixels dans l'image, le nombre de valeurs de I_1 et I_2 accessibles pour un décalage ρ donné entre les points d'analyse est de $(N - \rho_x) \times (N - \rho_y)$. Le décalage observé par ADS 3390 est de $\rho = (17, 67)$ pixels et n'autorise qu'une analyse sur 40 % de l'image. On dégrade en fait beaucoup le rapport signal sur bruit à observer des étoiles très séparées...

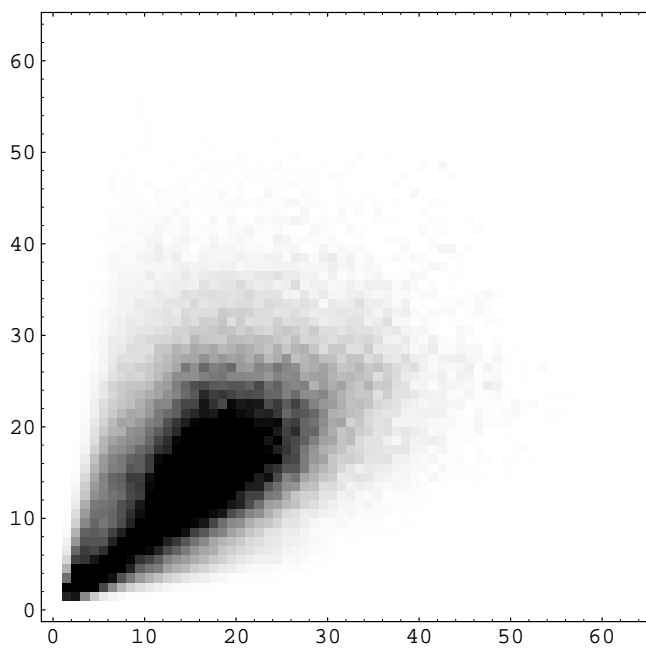
On observe sur la densité de probabilité de l'étoile de référence une enveloppe en forme d'hyperbole qui traduit une décorrélation des intensités. Cette structure n'est pas observée pour l'étoile double dont la densité de probabilité présente une forme en triangle trahissant une corrélation plus élevée, signature probable de l'étoile double. Ces figures ressemblent beaucoup à celles qui étaient observées pour ζ Aqr en infrarouge aux grands décalages.

Etoile double ADS 15281

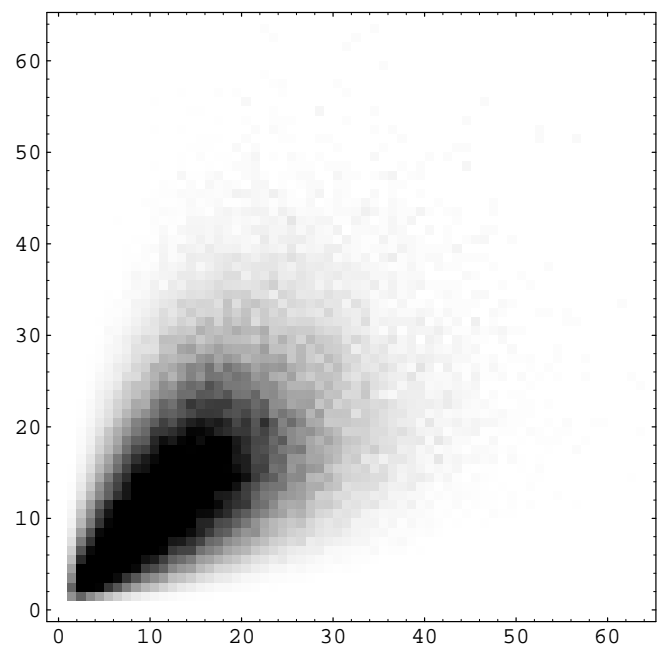


(a) Images au foyer du télescope

(b) Spectre de puissance

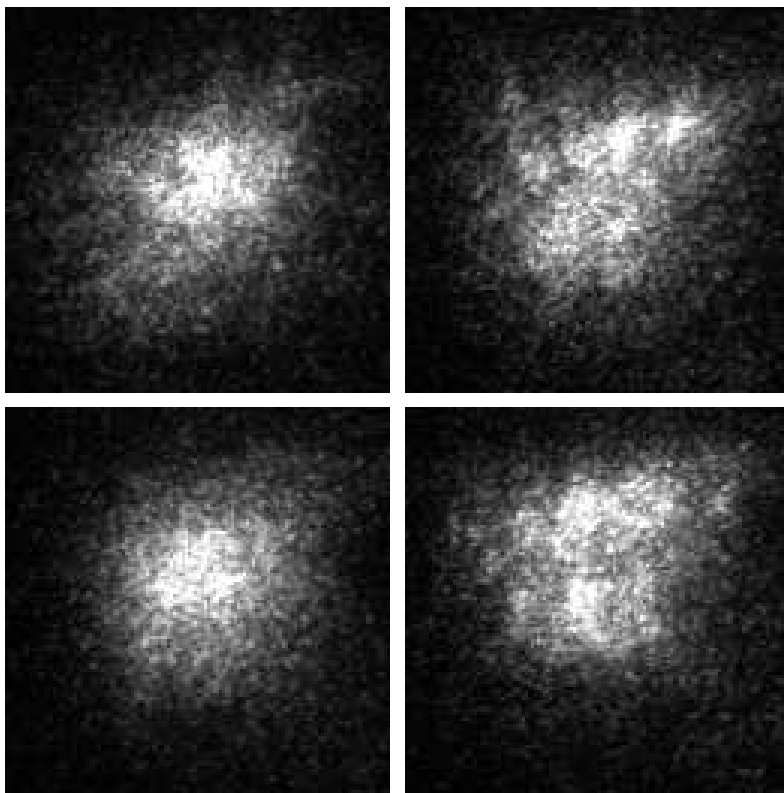


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(6,-1)$ pondérée par $I_1 I_2$ ²⁴³

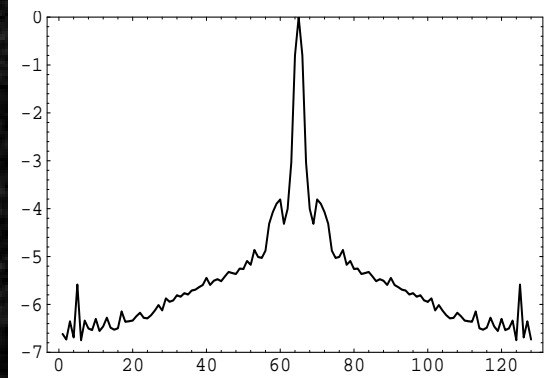
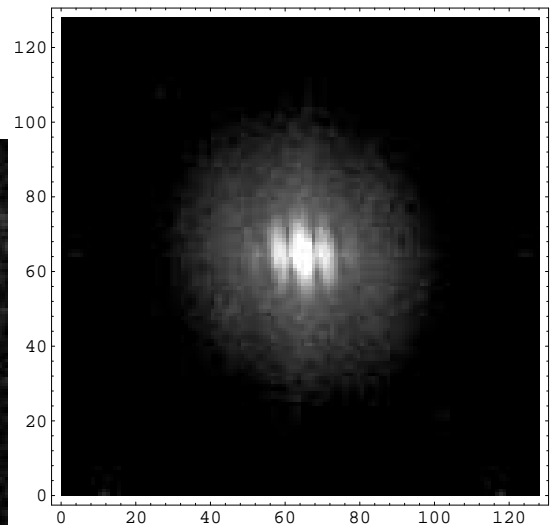


(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218412 au même décalage

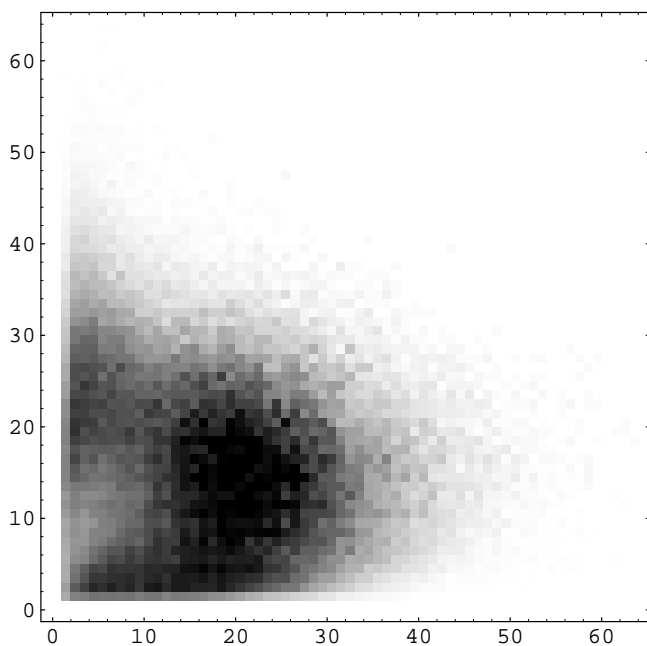
Etoile double ADS 2253



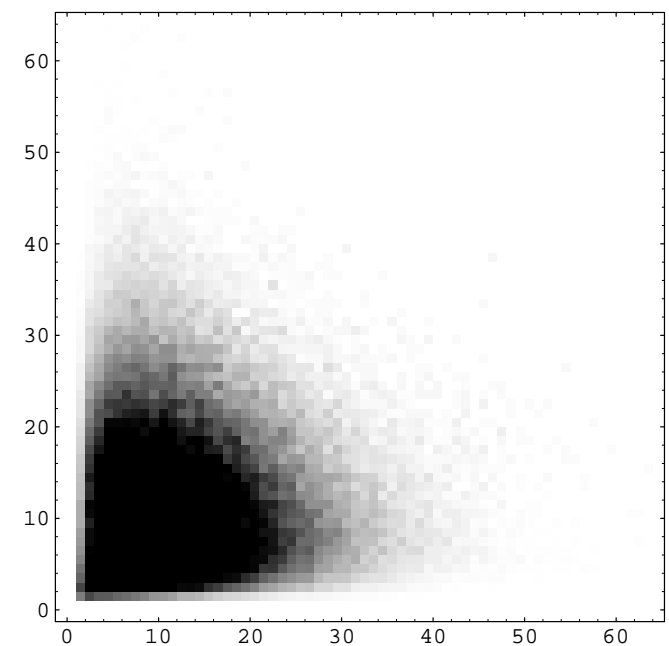
(a) Images au foyer du télescope



(b) Spectre de puissance

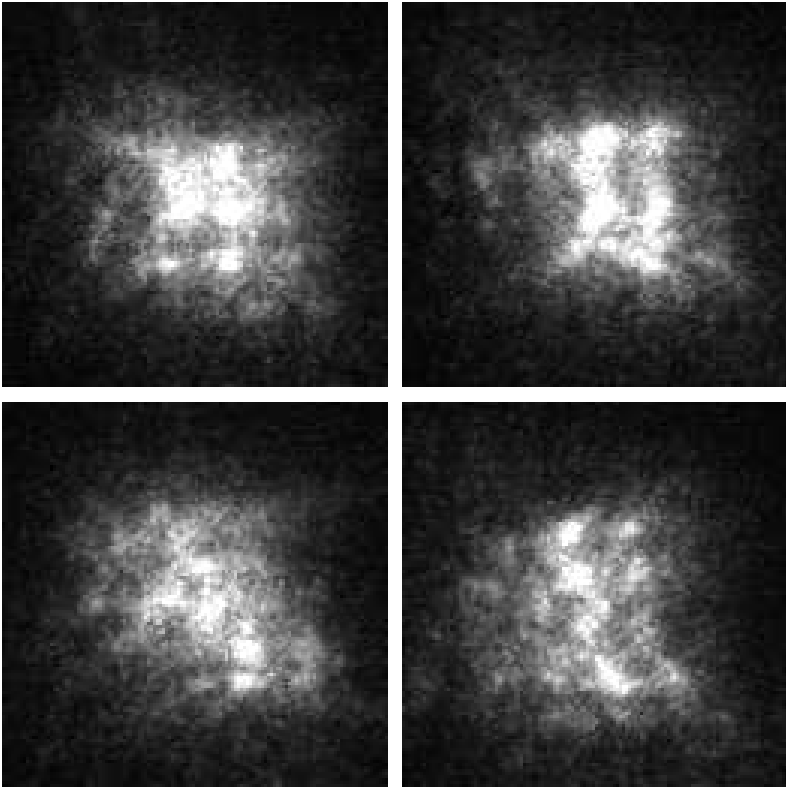


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(17,2)$ pondérée par $I_1 I_2$

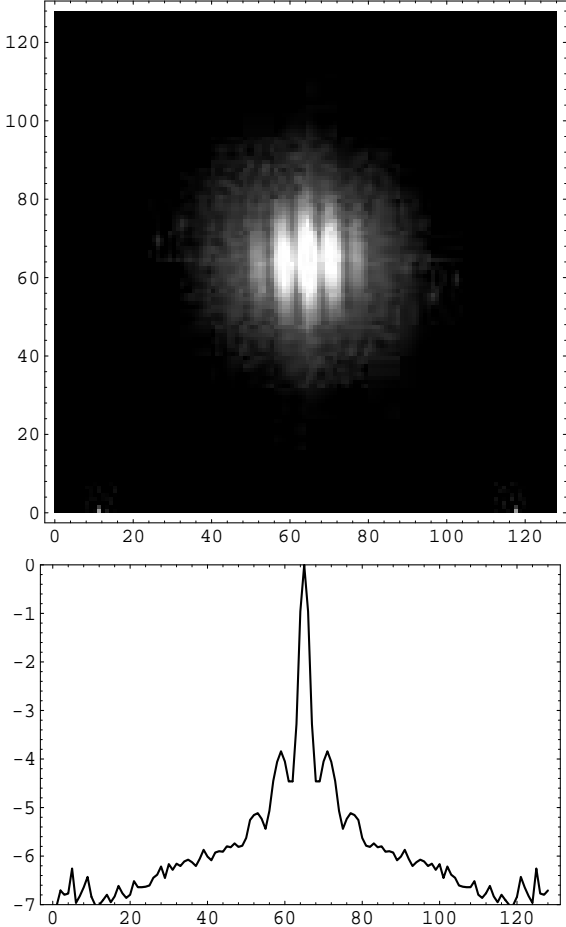


(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218142 au même décalage

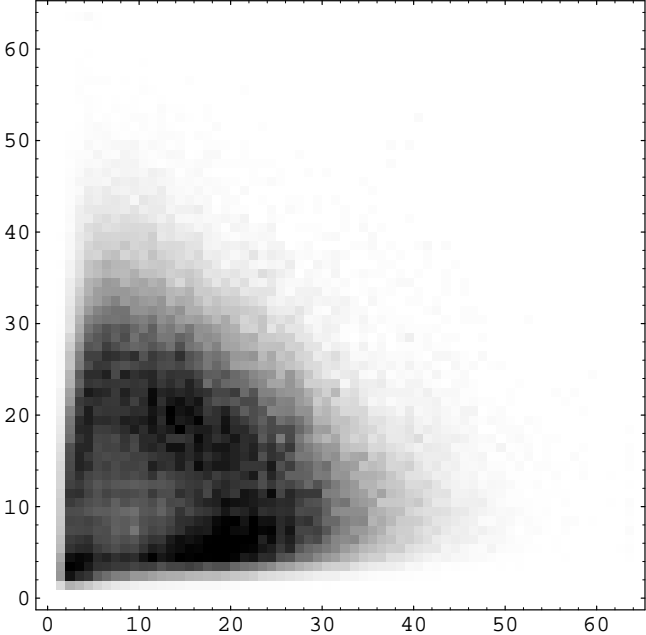
Etoile double ADS 16836



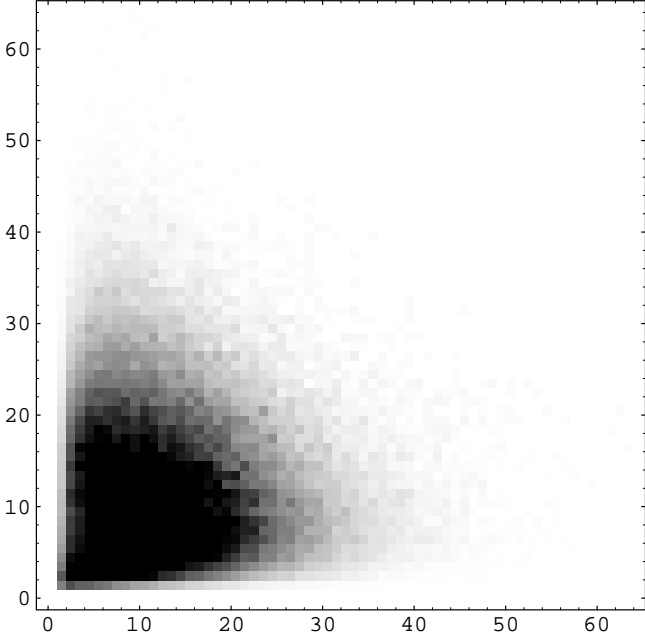
(a) Images au foyer du télescope



(b) Spectre de puissance

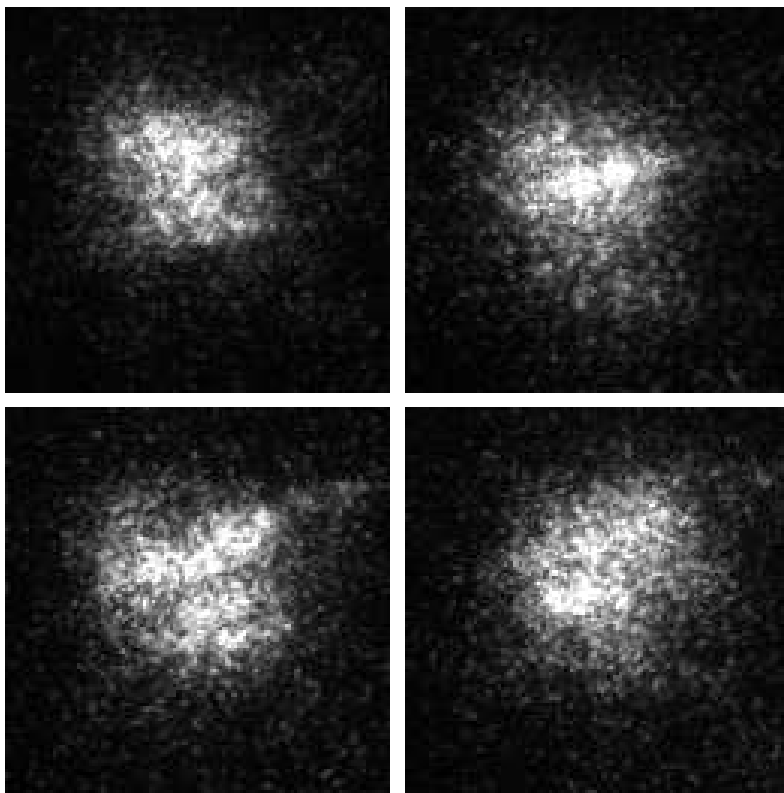


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(18,1)$ pondérée par $I_1 I_2$

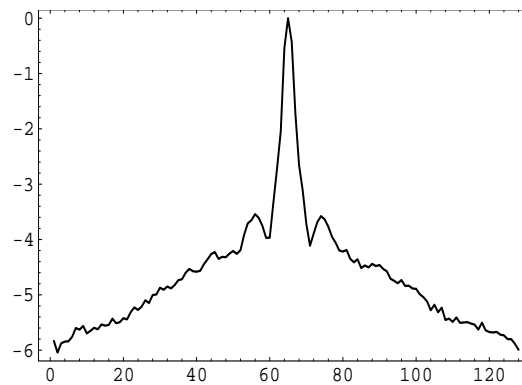
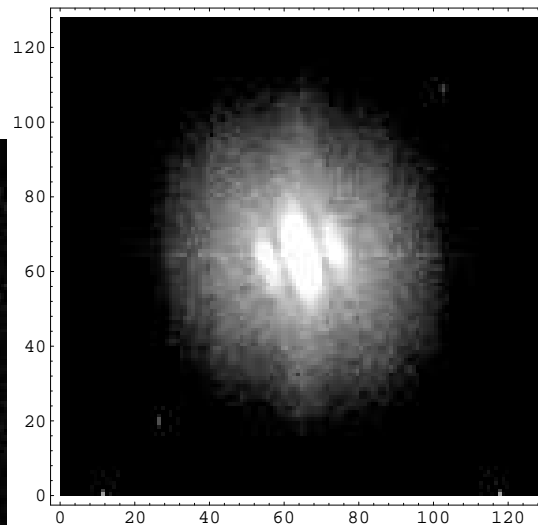


(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218142 au même décalage

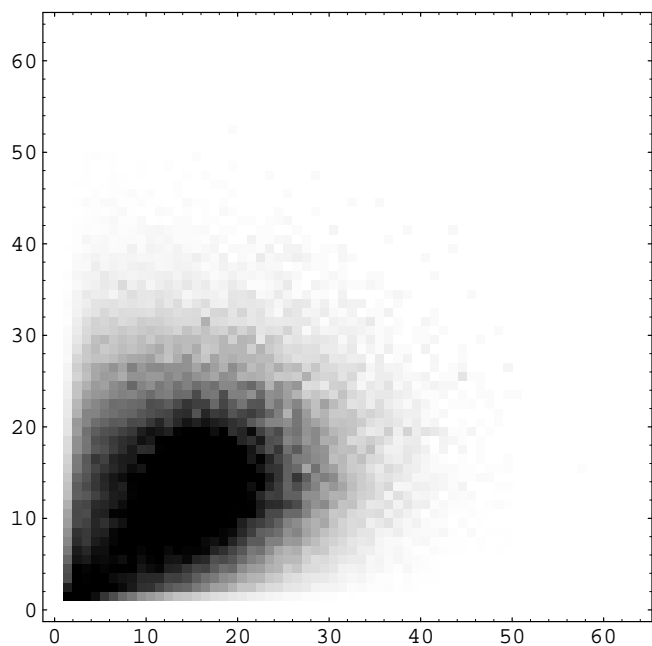
Etoile double ADS 15267



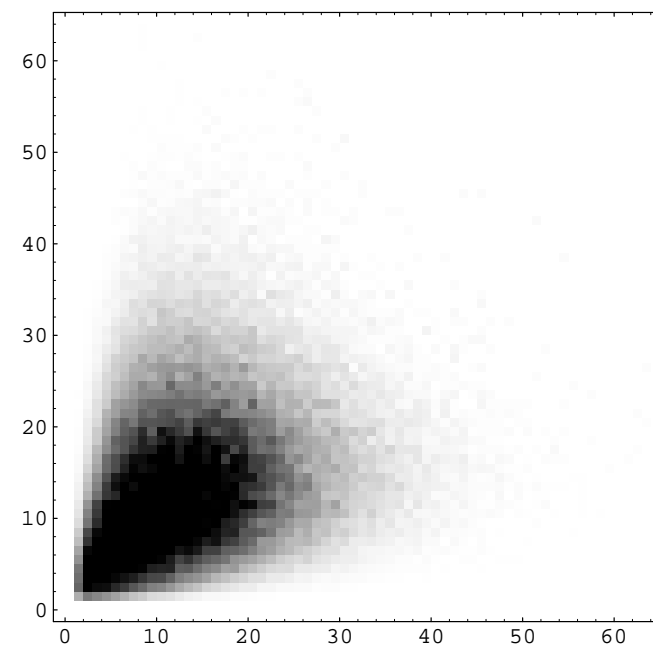
(a) Images au foyer du télescope



(b) Spectre de puissance

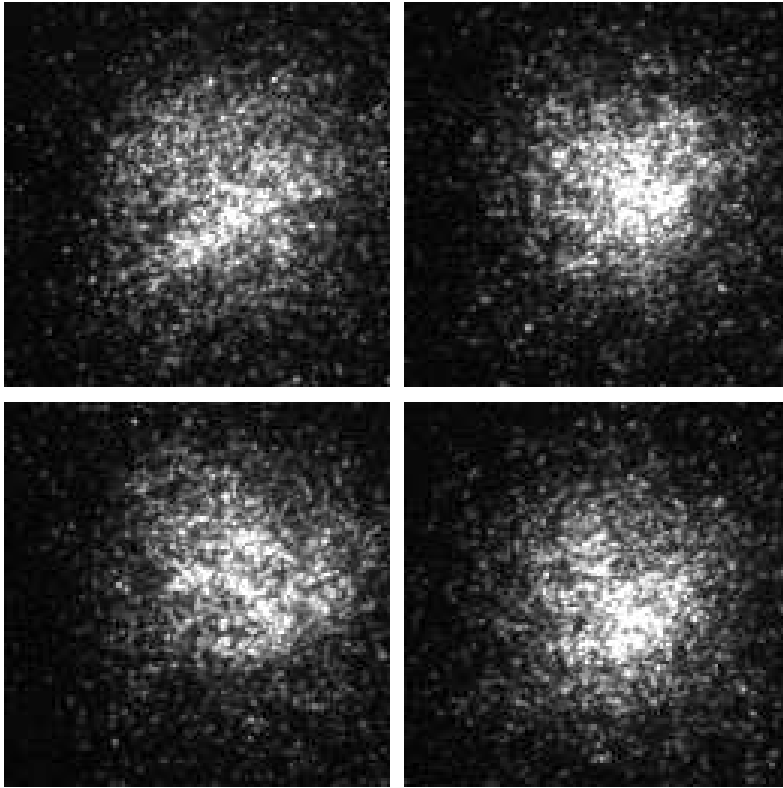


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(11,3)$ pondérée par $I_1 I_2$

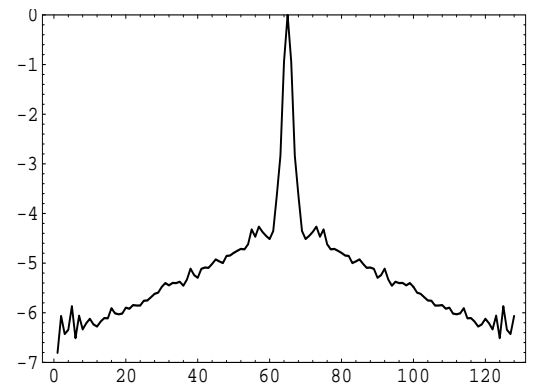
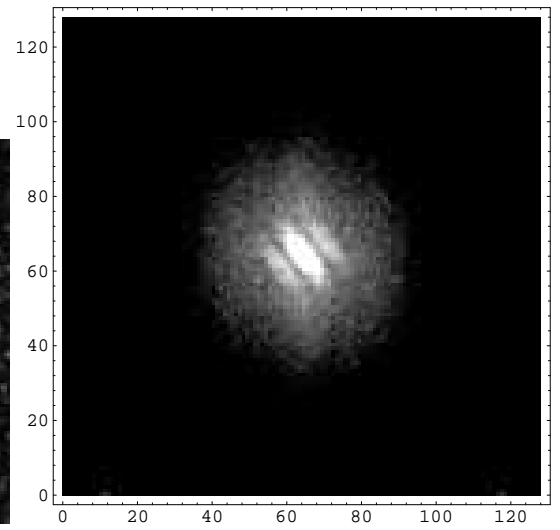


(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218142 au même décalage

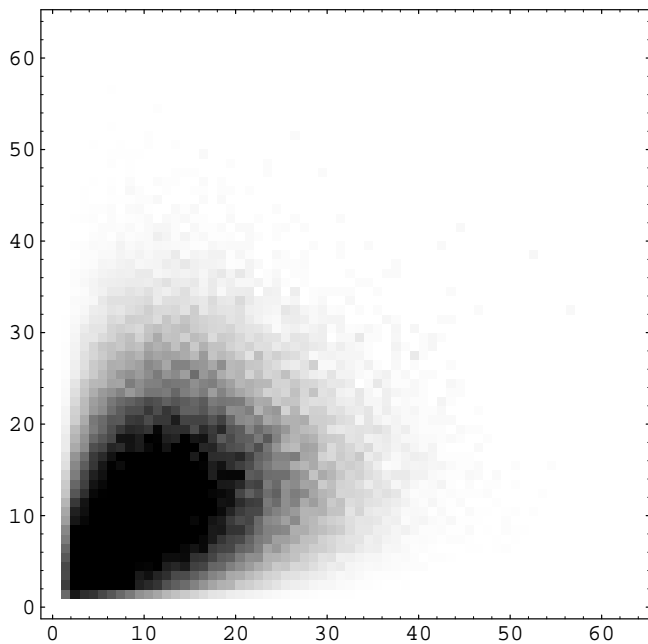
Etoile double ADS 15992



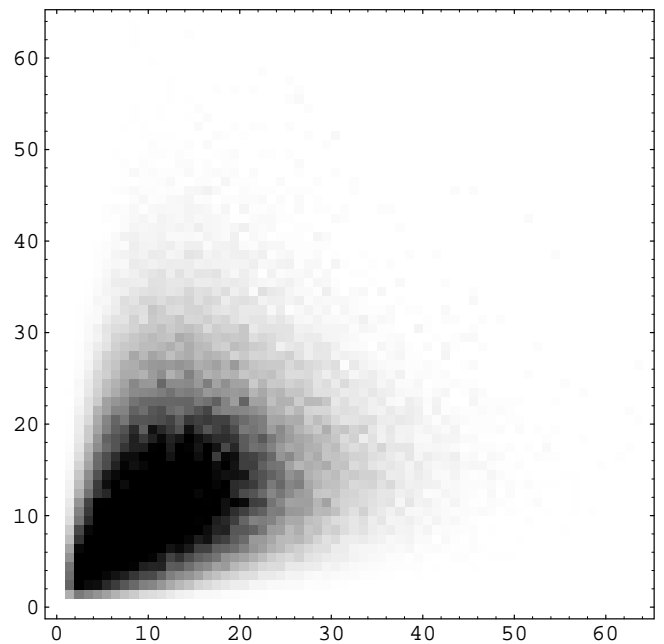
(a) Images au foyer du télescope



(b) Spectre de puissance

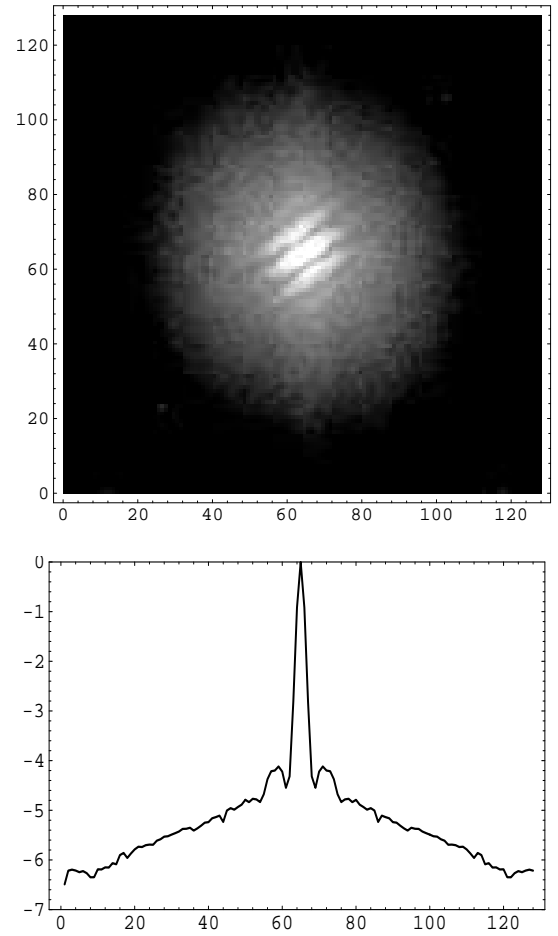
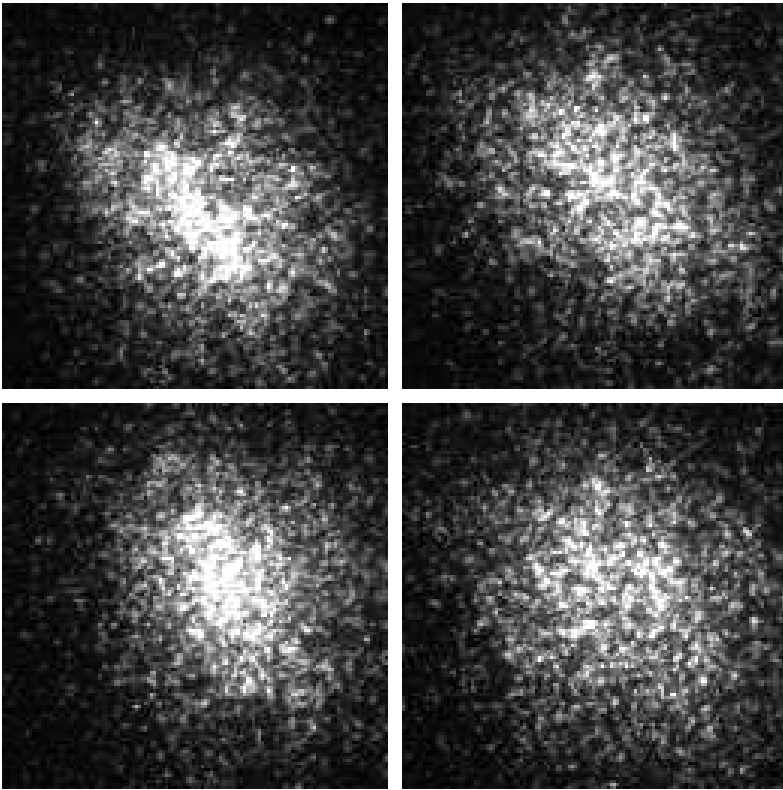


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(11,8)$ pondérée par $I_1 I_2$



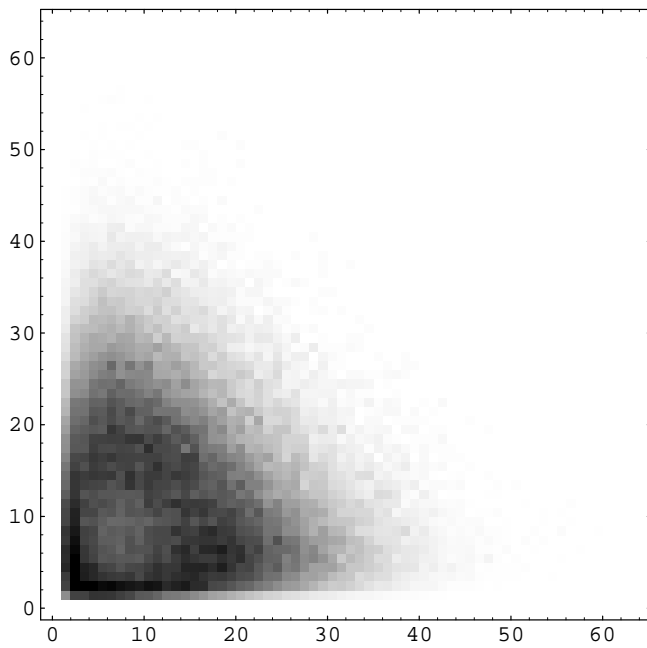
(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218142 au même décalage

Etoile double ADS 2980

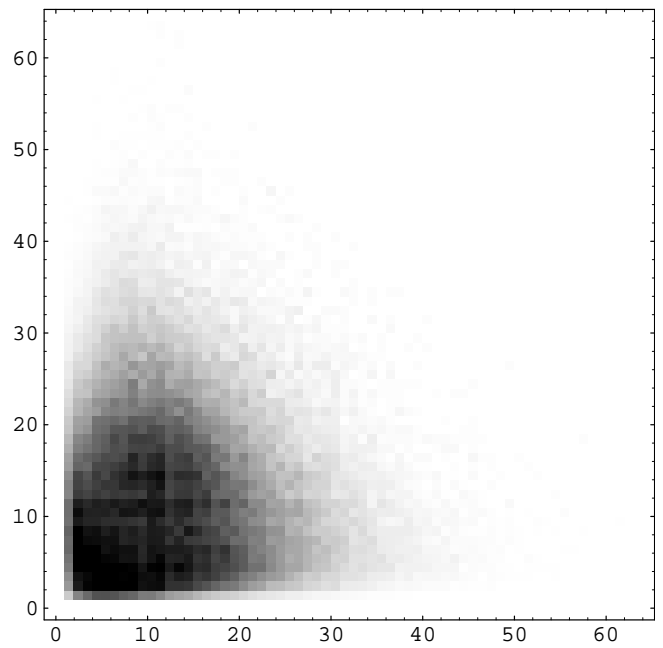


(a) Images au foyer du télescope

(b) Spectre de puissance

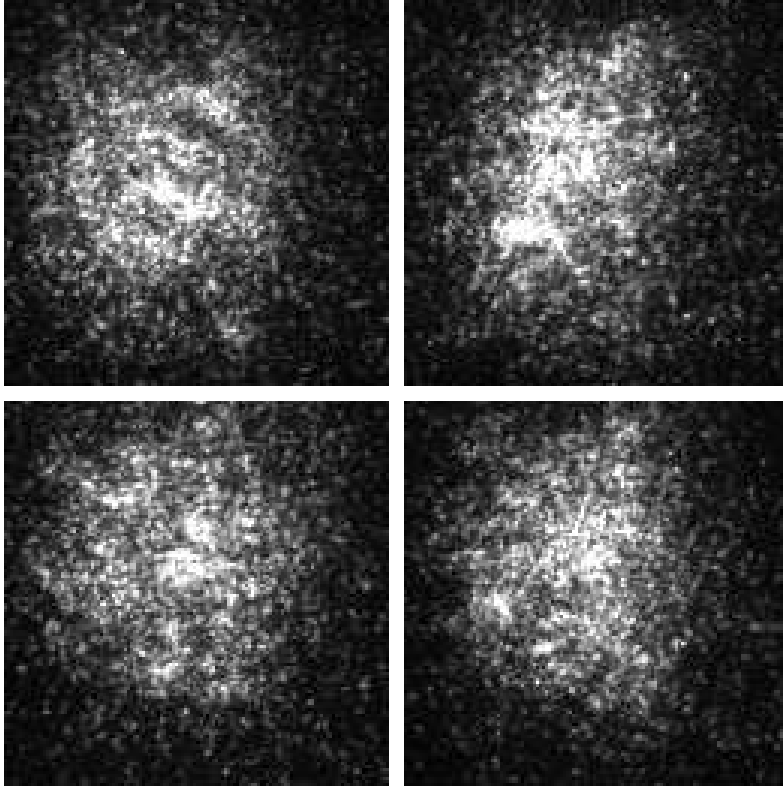


(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(-12,17)$ pondérée par $I_1 I_2$

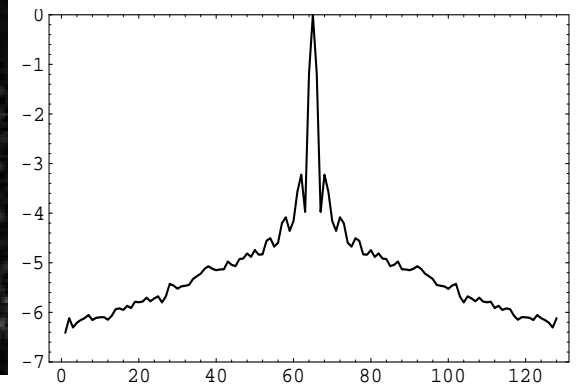
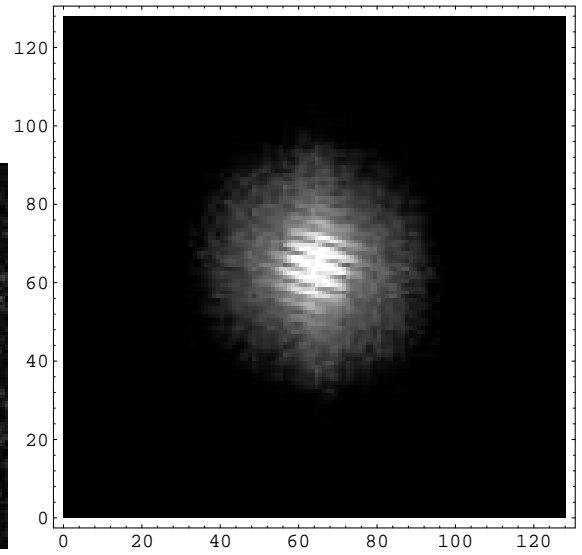


(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218412 au même décalage

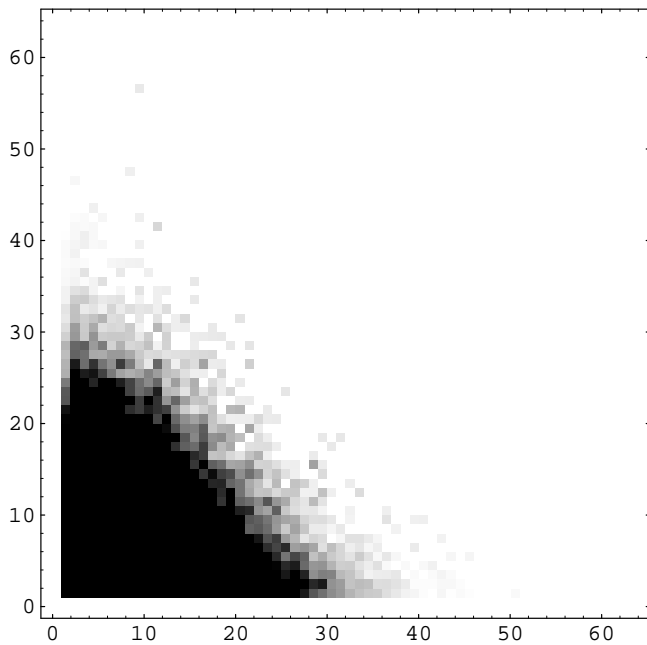
Etoile double ADS 3390



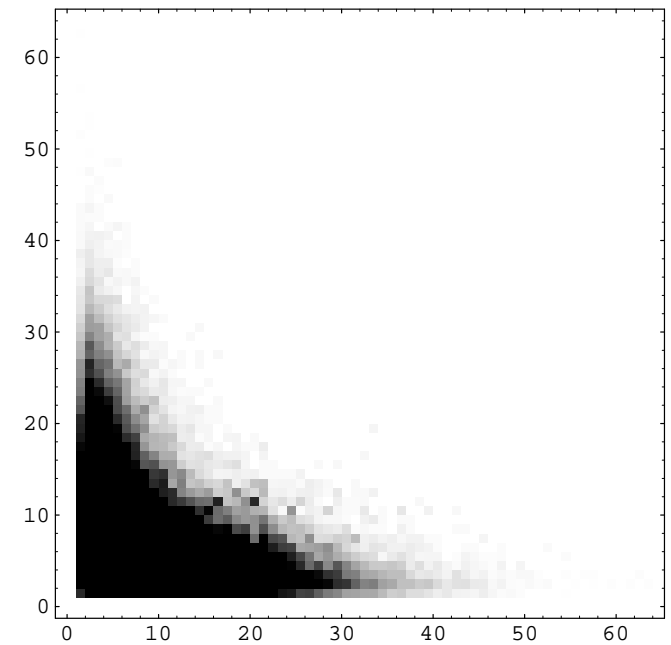
(a) Images au foyer du télescope



(b) Spectre de puissance



(c) Densité de probabilité d'ordre 2 au décalage $\rho=(17,67)$ pondérée par $I_1 I_2$



(d) Densité de probabilité d'ordre 2 de l'étoile de référence HD 218412 au même décalage

Conclusion et perspectives

Conclusion

En deux ans et demi de travail sur l'imagerie probabiliste, il m'a été donné de m'intéresser à un spectre assez vaste de problèmes parmi lesquels on peut citer

- l'étude des fonctions statistiques des champs de speckles,
- les problèmes de reconstruction d'images en interférométrie des tavelures,
- les problèmes inverses et les techniques telles que le recuit simulé,
- le comptage de photons et les problèmes qui lui sont reliés (biais, clipping ...),
- le dépouillement de données astrophysiques.

L'imagerie probabiliste nécessite une bonne connaissance des fonctions statistiques qui sont en fait la clef de tout phénomène aléatoire et particulièrement des images de speckles. Ces fonctions ont un champ d'application très vaste et sont utilisées dans de nombreux domaines du traitement d'image.

La finalité de notre travail est d'établir une méthode de reconstruction des images astronomiques dégradées par la turbulence en utilisant des fonctions comme les densités de probabilité ou les fonctions caractéristiques. Ces fonctions contiennent toute l'information à la fois sur les objets observés et sur les champs de speckles eux-mêmes. Les méthodes d'imagerie existantes utilisent actuellement des analyses par moment, moment d'ordre deux pour la speckle interférométrie, la speckle holographie ou la méthode de Knox et Thompson, moment d'ordre trois pour le speckle masking. Les informations contenues dans les moments d'ordre supérieur ne sont pas prises en compte.

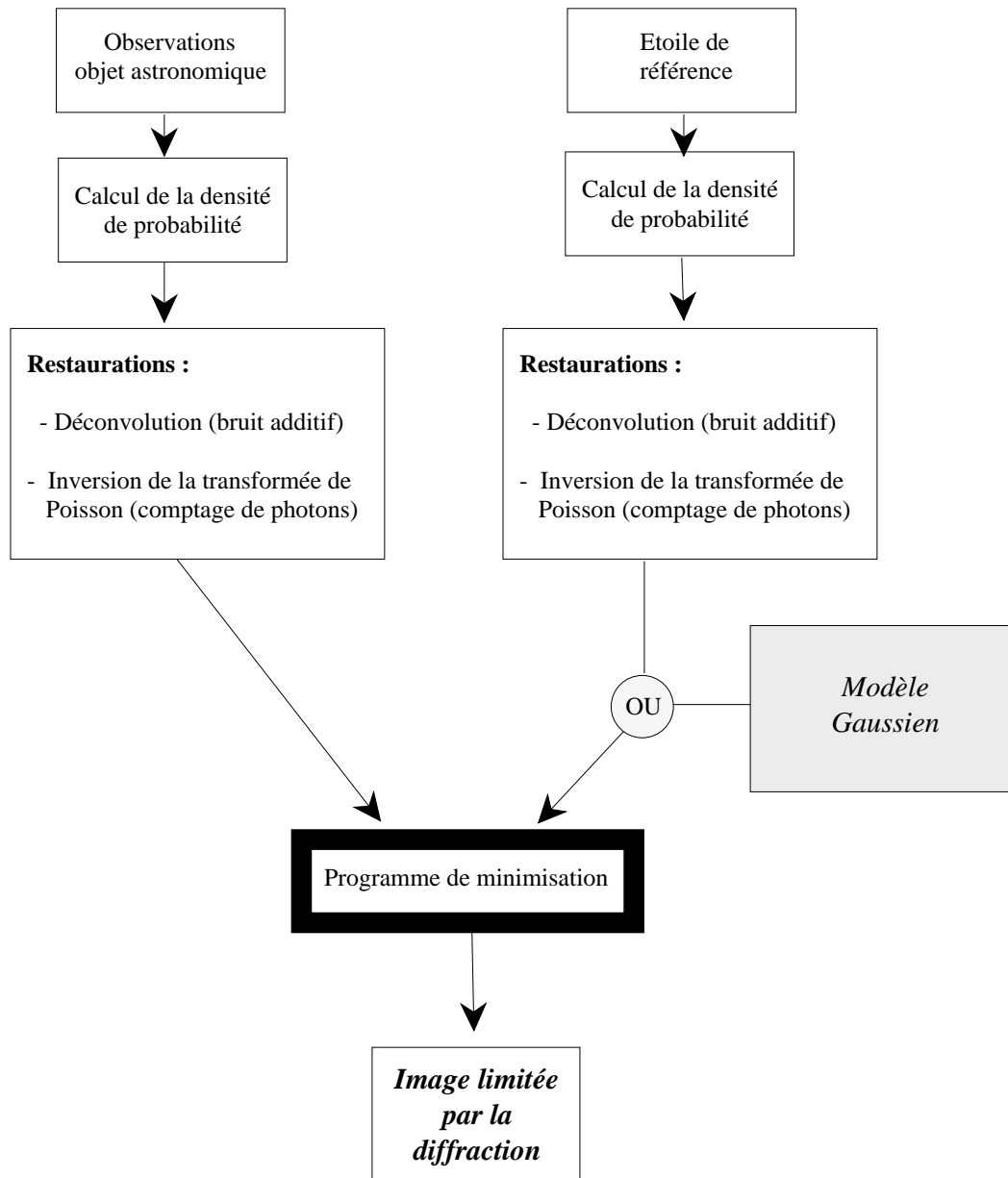
L'utilisation de fonction caractéristique permet une analyse simultanée à tous les ordres; cette fonction peut en effet s'écrire comme un développement en série de Taylor dont les coefficients sont les moments $m_n(x)$.

$$\phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \omega^n m_n(x)$$

La fonction caractéristique (ou la densités de probabilité qui est sa transformée de Fourier) contient ainsi toute l'information présente dans les moments du deuxième et du troisième ordre, mais aussi celle qui se trouve dans les moments d'ordre supérieur. Appliquée au problème de la reconstruction d'images en astronomie à haute résolution angulaire, son utilisation devrait permettre de fournir des solutions précises, plus encore que le speckle

masking. La contrepartie est la difficulté de manipulation de ces fonctions, au niveau théorique à cause des calculs que demande la modélisation aussi bien qu'au niveau du volume de ressources informatiques qui seront nécessaires (les programmes de minimisation de type recuit simulé sont en général très gourmands en temps de calcul machine).

L'organigramme général de l'imagerie probabiliste pourrait être le suivant.



De tous les points de l'organigramme, le modèle gaussien est actuellement celui qui est le plus avancé : nous sommes capables d'écrire la fonction caractéristique de n'importe quel objet vu à travers la turbulence. Ce modèle analytique va cependant être abandonné au profit de celui qui fait intervenir une étoile de référence et qui permet l'estimation de la statistique vraie des champs de speckles observés. En ce qui concerne les algorithmes de restauration, une inversion de la transformée de Poisson par recuit simulé est actuellement en cours de tests (pour le premier ordre), et il est envisagé de passer au second ordre assez prochainement. Le programme de reconstruction d'images par minimisation n'existe pas encore, du moins est-il à l'état de recherches prospectives comme en témoigne le travail qui a été fait sur les étoiles doubles et qui est décrit à la fin du chapitre 2.

L'imagerie probabiliste a déjà commencé à donner des résultats astrophysiques en infrarouge et dans le visible sur des étoiles doubles. Il semble que la méthode soit même assez précise quant à l'estimation des rapports de magnitudes, puisque pour ADS 15281 nous avons eu 4 % d'erreur avec une mesure d'angle relativement grossière sur sa densité de probabilité du second ordre.

Par ailleurs l'utilisation des fonctions statistiques a permis de modéliser par une démarche nouvelle les problèmes qui apparaissent en comptage de photons. Nous avons bien retrouvé l'expressions des biais observés sur les densités spectrales et les bispectres calculés par Dainty et Greenaway [34], et par Wirtitzer [79]. Nous avons aussi appréhendé le problème du clipping qui écrête à 1 le nombre de photons détectés sur un pixel. Ce problème était connu depuis assez longtemps mais on n'en trouve pas de description détaillée dans la littérature ; les résultats que nous avons trouvés montrent c'est un problème qui n'est plus négligeable dès que le flux devient supérieur à 10^{-2} photon par pixel. Il limite sérieusement la possibilité d'appliquer des techniques d'ordre supérieur pour reconstruire des images et peut même conduire en speckle interférométrie à des résultats erronés. Il n'y a pas vraiment de solution à ce problème qui n'est pas linéaire, si ce n'est d'utiliser des caméras qui autorisent une certaine dynamique dans le comptage des photons (CCD bombardés, PAPA, etc...).

Perspectives

A court terme

- Nous allons continuer dans un premier temps le traitement des données sur les étoiles doubles et essayer de diminuer l'influence du bruit (déconvolution). Une attention particulière sera portée sur le cas d'ADS 15281 qui est l'étoile qui présente les meilleures images.
- Deux missions d'observations sont prévues en Mai et Juin 1992 à l'observatoire de Haute-Provence. Nous ferons des images d'étoiles doubles et de quelques étoiles triples et multiples avec le télescope de 193 cm. Nous sommes sur le point d'acheter un système d'acquisition d'image basé sur un ordinateur NeXT Cube que nous inaugurerons à cette occasion et avec lequel nous observerons régulièrement.

A moyen terme

- Nous envisageons dans un premier temps de limiter la technique d'imagerie à des objets brillants (jusqu'à la magnitude 8 environ) pour éviter les problèmes liés au comptage de photons. L'accent sera mis au départ sur les étoiles doubles pour deux raisons. D'abord parce que ce sont les objets astrophysiques les plus simples qui soient et qu'on en trouve une grande quantité, ensuite parce que la mesure des paramètres orbitaux des couples stellaires permet de calibrer les relations masse-luminosité et les distances, paramètres fondamentaux qui ont des répercussions dans tous les domaines de l'astrophysique. L'imagerie probabiliste devrait être capable d'améliorer les précisions actuelles sur les mesures de rapport d'intensité, qui sont de l'ordre de 4 à 5 % pour les méthodes traditionnelles, et inférieures au pourcent pour l'algorithme *fork* de Bagnuolo [21] qui suit une démarche proche de l'analyse probabiliste.
- Nous allons entreprendre une campagne d'observations d'étoiles doubles et multiples, probablement au 193 cm de l'observatoire de Haute Provence (et sur des plus gros instruments si possible).
- Nous commencerons également l'élaboration d'un programme de reconstruction d'images par recuit simulé. D'abord appliqué aux étoiles doubles, ce programme devra fonctionner de manière suffisamment rapide et transparente pour être utilisé par des personnes non-initiées. Il tournera vraisemblablement sur un ordinateur puissant de type Connection Machine.
- Parallèlement les travaux sur l'inversion de la transformation de Poisson seront poursuivis à l'ordre deux. Des tests pourront être réalisés au moyen de simulations numériques, mais l'utilisation d'une telle procédure sur des images réelles en comptage de photons est fortement liée au capteur. Il est en effet nécessaire d'obtenir une bonne estimation de la densité de probabilité des images "photonisées" pour espérer une reconstruction satisfaisante de la statistique à fort flux. Or les détecteurs à comptage de photons actuels ne possèdent guère de dynamique du nombre de photons comptés et ne permettent pas l'application d'une telle procédure inverse.

A plus long terme

- L'expérience acquise sur les étoiles doubles et multiples permettra de commencer à imager des objets structurés comme des étoiles géantes ou des astéroïdes. La difficulté vient ici du plus grand nombre de points sur lequel est échantillonné l'objet.
- L'imagerie à comptage de photons fait aussi partie de nos objectifs futurs, mais celle-ci est fortement conditionnée à l'emploi de capteurs les plus parfaits possibles.
- Enfin l'application à la synthèse d'ouverture sera envisagée. Ce point a été évoqué au paragraphe 2.4.1 et une courte mention lui a été dédiée dans la communication présentée à San Diego en Juillet 1990 [8]. L'idée serait la suivante. Considérons la densité de probabilité du deuxième ordre $P_2(I_1, I_2; \rho)$ fonction de deux intensités et d'un décalage spatial ρ mesuré au plan focal. La transformée de Fourier de cette fonction par rapport à la variable ρ s'écrit $\hat{P}_2(I_1, I_2; \nu)$ et est une fonction continue de la fréquence spatiale ν pour un télescope à pupille unique. En fait lors des

traitements informatiques la fréquence spatiale est naturellement échantillonnée par le programme de transformation de Fourier et la fonction $\hat{P}_2(I_1, I_2; \nu)$ se comporte comme une succession de plans $\hat{P}_2(I_1, I_2)$ pour chaque valeur de ν .

Un interféromètre à N ouvertures possède $N(N - 1)/2$ bases simultanées et échantillonne $N(N - 1)$ fréquences spatiales dans le plan de Fourier. Il donnerait donc accès en imagerie probabiliste à $N(N - 1)$ plans ($\nu = \text{Cte}$) de la fonction $\hat{P}_2(I_1, I_2; \nu)$ qui présenterait alors des “trous” (des plans vides) par rapport à celle qui serait obtenue avec le télescope monopupille de diamètre égal à la plus grande base de l’interféromètre. Un processus d’imagerie possible avec un télescope à pupille diluée pourrait alors être le suivant :

- obtention d’images avec l’interféromètre (système de franges compliqué),
- calcul de la densité de probabilité $P_2(I_1, I_2; \rho)$,
- transformation de Fourier par rapport à ρ : $\hat{P}_2(I_1, I_2; \nu)$ (cette fonction contient des trous),
- remplissage des plans vides par interpolation ou par d’autres méthodes : $\hat{\hat{P}}_2(I_1, I_2; \nu)$,
- transformation de Fourier inverse : on obtient la fonction $\tilde{P}_2(I_1, I_2; \rho)$ qui est une estimation de la densité de probabilité idéale des images du télescope monopupille équivalent à l’interféromètre. Cette estimation est d’autant plus fidèle que le nombre de bases est élevé.
- processus d’imagerie normal à partir de $\tilde{P}_2(I_1, I_2; \rho)$ pour obtenir des images proches de la limite de diffraction du télescope dont le diamètre est la plus grande base de l’interféromètre.

Précisons qu’il ne s’agit là que de réflexions préliminaires sur un sujet que nous n’avons pas du tout abordé. Aucune tentative simulation ni aucune approche théorique n’ont encore été effectuées à ce jour.

ANNEXE I

POSTER

présenté à

Physique en Herbe 90

Imagerie à haute résolution en
astronomie optique

Aussois — 25–29 Juin 1990

ANNEXE II

POSTER

présenté à

ESO Conference on High Resolution imaging by Interferometry II

Probability Imaging
at photon-counting levels

Garching — 14–18 Octobre 1991

Bibliographie

- [1] AIME C. “Application des techniques de speckle interferometrie à l’étude de la granulation solaire” *J. Optics* **10**, 318–319 (1987)
- [2] AIME C., KADIRI S., RICORT G., RODDIER F., VERNIN J. “Measurements of stellar speckle interferometry lens-atmosphere modulation transfer function” *Opt. Acta* **26**, 575–581 (1979)
- [3] AIME C. “Proposition d’imagerie probabaliste de systèmes d’étoiles en interférométrie de speckle” *J. Optics* **18**, 101–110 (1987)
- [4] AIME C. “Speckle imaging: description of the second probability density function of a binary star speckle pattern” *Proc. SPIE — Inverse Problems in Optics* vol. **808**, 14–18 (1987)
- [5] AIME C. “Probability Imaging of double and multiple stars” *Proc. of the ESO/NOAO Meeting: High resolution imaging from the ground using interferometric techniques*, 63–66, Oracle, Arizona (1987)
- [6] AIME C., MARTIN F. “Imaging of multiple star systems using the second probability density function. Mathematical description and numerical simulation” *Proc. of the NOAO/ESO Conference on High resolution imaging by interferometry*, 425–440, Garching (1988)
- [7] AIME C., RICORT G., PERRIER C. “Probability Imaging of the bright double star ζ Aqr in the infrared” *Experimental Astronomy* **1**, 267–284 (1990)
- [8] AIME C., ARISTIDI E., LANTERI H., RICORT G. “Second order statistics of speckle pattern used for image reconstruction” *Proc. SPIE — Digital Image Synthesis and Inverse Optics* vol. **1351**, 628–639, San Diego (1990)
- [9] AIME C., ARISTIDI E. “Probability Imaging: the statistics of speckle patterns of extended astronomical sources at high light level” *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1434–1441 (1991)
- [10] AIME C., ARISTIDI E., LANTERI H., RICORT G. “Probability Imaging of Extended Astronomical Sources at Low Light Levels” *ICO Topical Meeting on Atmospheric, Volume and surface scattering and Propagation*, 83–86, Florence (1991)
- [11] AIME C., ARISTIDI E., LANTERI H., RICORT G. “Effects of clipped photon detection in the triple correlation technique” *ESO Conf. on High resolution imaging by interferometry II*, Garching (1991)

- [12] AIME C., ARISTIDI E., LANTERI H., RICORT G. “Probability Imaging at Photon Counting Levels” *ESO Conf. on High resolution imaging by interferometry II*, Garching (1991)
- [13] AIME C., ARISTIDI E. “A statistical approach of bias effects in the techniques of speckle interferometry and speckle masking” Accepté par *J. Opt. Soc. Am. A* (1992)
- [14] AIME C., ARISTIDI E., LANTERI H., RICORT G. “Imagerie Probabiliste : Sur l’Ordre d’Analyse d’une Structure de Speckles en Astronomie à Haute Résolution Angulaire” soumis à *Signal Processing* (1992)
- [15] AITKEN G., HOUTMAN R., JOHNSON R., POCHE J.M. “Direct phase gradient measurement for speckle image reconstruction” *Appl. Opt.* **24**, 2926–2930 (1986)
- [16] AITKEN G., HOUTMAN R., JOHNSON R. “Phase-gradient speckle image processing : digital implementation and noise bias terms” *Appl. Opt.* **25**, 1031 (1986)
- [17] ARISTIDI E., RICORT G., LANTERI H., AIME C. “Effects of clipped photon detection in speckle interferometry” *ICO Topical Meeting on Atmospheric, Volume and surface scattering and Propagation*, 167–170, Florence (1991)
- [18] ARISTIDI E., AIME C. “The effects of clipped photon detection in Labeyrie’s speckle interferometry technique” Soumis à *Experimental Astronomy, en cours de révision*. (1991)
- [19] AYERS G.R., NORTHCOTT M.J., DAINTY J.C. “Knox-Thompson and triple-correlation imaging through atmospheric turbulence” *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 963–985 (1988)
- [20] AYERS G.R. “Speckular reflections : developments in astronomical speckle imaging techniques” *Proc. SPIE — Digital Image Synthesis and Inverse Optics* vol. **1351**, 510–521, San Diego (1990)
- [21] BAGNUOLO W.G. “Binary-star intensity ratios by the fork algorithm” *Optics Letters* **13**, 907–909 (1988)
- [22] BARAKAT R., NISENSEN P. “Influence of the wave-front correlation function and deterministic wavefront aberrations on the speckle image reconstruction problem in the high-light level regime” *J. Opt. Soc. Am.* **71**, 1390–1405 (1981)
- [23] BATES R.H.T, GOUGH P.T., NAPIER P.J “Speckle interferometry gives holograms of multiple stars systems” *Astron. Astroph.* **22**, 319–320 (1973)
- [24] BATES R.H.T. “Astronomical speckle imaging” *Physics Reports* Review section of *Physics Letters* North-Holland Pub. Co. **90**, 203–297 (1982)
- [25] BATES R.H.T, DAVEY B.L.K. “Towards making shift-and-add a versatile imaging technique” *Proc. SPIE — Digital Image Recovery and Synthesis* vol. **828**, 87–91, San Diego (1987)
- [26] BONNEAU D., FOY R. “Interférométrie au 3.60 m CFHT I. Résolution du système Pluton-Charon” *Astron. Astroph.* **92**, L1–L4 (1980)

- [27] BONNEAU D., FOY R. “First direct measurements of the diameters of the large satellites of Uranus and Neptune” *Astron. Astroph.* **161**, L12–L13 (1986)
- [28] BELETIC J. “Low Light Level Imaging through Aberrations” *ESO Conf. on High resolution imaging by interferometry II*, Garching (1991)
- [29] CHELLI A., LENA P. RODDIER C., RODDIER F., SIBILLE F. “Modulation transfer function for infrared stellar speckle interferometry: evidence for a log-normal statistics” *Opt. Acta* **26**, 583–595 (1979)
- [30] CHERNOV L.A. *Wave propagation in a random medium* Dover Publication Inc., N.Y. (1967)
- [31] COLLIER R.J., BURCKHARAT C.B., LIN L.H. *Optical Holography* Academic Press, New-York (1971)
- [32] DAINY J.C. (ouvrage collectif sous la direction de ...), *Topics in Applied Physics: Laser speckle and Related Phenomena*, Springer-Verlag (Berlin) **9** (1975)
- [33] DAINY J.C. “The statistics of speckle pattern” *Progress in Optics* **XIV**, 3–46, North-Holland (1976)
- [34] DAINY J.C, GEENAWAY A. “Estimation of spatial power spectra in speckle interferometry” *J. Opt. Soc. Am.* **69**, 786–790 (1979)
- [35] DANJON A., COUDER A. *Lunettes et Télescopes*, Eds. A. Blanchard, Paris (1979)
- [36] DRUMMOND J.D., HEGE E.K.. “Knox-Thompson images of 4 Vesta” *Proc. SPIE* vol. **828**, 27–31 (1987)
- [37] DUPONT S., GRUHIER S. *Déconvolution par la méthode du recuit simulé*, Rapport de stage, *E.S.S.I*, Université de Nice–Sophia-Antipolis (1992)
- [38] FIENUP J.R. “Reconstruction of an object from the modulus of its Fourier transform” *Optics Letters* **3**, 27–29 (1978)
- [39] FRIED D.L. “Optical resolution through a randomly inhomogeneous medium for very long and very short exposures” *J. Opt. Soc. Am.* **56**, 1372–1379 (1966)
- [40] GEZARI D.Y., LABEYRIE A., STACHNIK R.V. “Speckle interferometry: diffraction limited measurements of nine stars with the 200-inch telescope” *Astroph. J.* **173**, L1–L15 (1972)
- [41] GONGLEWSKI J. “New astronomical results in speckle holography” in *ESO Conference on High Resolution Imaging by Interferometry II*, Garching, 14–18 Octobre 1991
- [42] GOODMAN J.W. *Statistical Optics* J. Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore
- [43] GOODMAN J.W. *Introduction à l’optique de Fourier et à l’holographie* Eds. Masson, Paris (1972)

- [44] HUNT B.R., FRIGHT W.R., BATES R.H.T. “Analysis of the shift-and-add method for imaging through turbulent media” *J. Opt. Soc. Am* **73**, 456–465 (1983)
- [45] ISOBE S., NORIMOTO Y., NOGUCHI M., OHTSUBO J., BABA N., MIURA N., YANAKA H., TANAKA T. “Speckle observations of visual and spectroscopic binaries. I” *Publ. Natl. Astron. Obs. Japan* **1**, 217–225 (1990)
- [46] ISOBE S., NORIMOTO Y., NOGUCHI M., OHTSUBO J., BABA N., MIURA N., YANAKA H., TANAKA T. “Speckle observations of visual and spectroscopic binaries. II” *Publ. Natl. Astron. Obs. Japan* **1**, 381–392 (1990)
- [47] KNOX K.T., THOMPSON B.J. “Recovery of images from atmospherically degraded short-exposures images” *Astroph. J.* **193**, L45–L48 (1974)
- [48] KOLMOGOROV A.N. *Dan. S.S.S.R.* **30**, 229– (1941)
- [49] KORFF D. “Analysis of a method for obtaining near-diffraction-limited information in the presence of atmospheric turbulence” *J. Opt. Soc. Am* **63**, 15–46 (1976)
- [50] LABEYRIE A. “Attainment of diffraction-limited resolution in large telescopes by Fourier analysing speckle patterns in stars images” *Astron. Astroph.* **6**, 85–87 (1970)
- [51] LABEYRIE A. “Observations interférométriques au Mont Palomar” *Nouv. Rev. Optique* **5**, 141–151 (1974)
- [52] LABEYRIE A. “High resolution techniques in optical astronomy” *Progress in Optics* **XIV**, 47–87, North-Holland (1976)
- [53] LANNES A. “Backprojection Mechanisms in Phase-Closure Imaging. Bispectral Analysis of the Phase-Restoration Process” *Experimental Astronomy* **1**, 47–76, (1989)
- [54] LEE Y.W. *Statistical theory of communication*, J. Wiley and Sons, N.Y. (1960)
- [55] LENA P. *Méthodes physiques de l’observation*, Coll. Savoirs Actuels, InterEditions/Eds. du CNRS, Paris (1986)
- [56] LIU Y.C., LOHMANN A. “High resolution image formation through the turbulent atmosphere” *Opt. Commun.* **8**, 372–377 (1973)
- [57] LOHMANN A., WEIGELT G., WIRNITZER B. “Speckle masking in astronomy: triple correlation theory and application” *Appl. Opt.* **22**, 4028–4037 (1983)
- [58] MC KECHNIE T.S.. “Light propagation through the atmosphere and the properties of images formed by large ground-based telescopes” *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 346–365 (1991)
- [59] MANDEL L. *Proc. Phys. Soc.* **74**, 233 (1959)
- [60] MARSH K.A., RICHARDSON J.M. “Probabilistic algorithm for phase retrieval” *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 993–998 (1988)
- [61] MEHTA C.L. “Theory of photoelectron counting” *Progress in Optics* **VIII**, 371–440, North-Holland (1970)

- [62] NIETO-VESPERINAS M., NAVARO R., FUENTES R.J. “Performances of a simulated annealing algorithm for phase retrieval” *J. Opt. Soc. Am. A* **5**, 30–38 (1988)
- [63] OHTSUBO J., NAKAJIMA K. “Image recovery by simulated annealing with known Fourier modulus” *Opt. Commun.* **86**, 265–270 (1991)
- [64] PAPOULIS A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* McGraw-Hill Book Compagny (1984)
- [65] PEREZ-ILZARBE M.J., NIETO-VESPERINAS M.. “Phase retrieval of photon-limited stellar images from information of the power spectrum only” *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 908–918, San Diego (1991)
- [66] RAO GUDIMETLA S.V. “Three-Point joint density functions for the intensity of partially and fully developed monochromatic laser speckle pattern” *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 1943–1946 (1991)
- [67] RICORT G., LANTERI H., ARISTIDI E., AIME C. “Application of the Richardson-Lucy algorithm to the deconvolution of twofold Probability Density Function” Soumis à: *Journal of the European Optical Society A* (Février 1992)
- [68] RODDIER F. “The effects of atmospheric turbulence in optical astronomy” *Progress in Optics* **XIX**, 281–376, North-Holland (1991)
- [69] RODDIER F. “Triple correlation as a phase closure technique” *Opt. Commun.* **60**, 145–148, North-Holland (1986)
- [70] RODDIER F. “Interferometric imaging in optical astronomy” *Physics Reports* **170**, 97–166 (1988)
- [71] SALEH B. *Photoelectron Statistics*, Springer-Verlag, Berlin (1978)
- [72] STARCK H., WOODS J.W. *Probabilities, Random processes ans Estimation theory for engineers*, Prentics-Hall, New-Jersey (1986)
- [73] STACHNIK R.V., NISENSEN P., EHN D.C., HUDGIN R.H., SCHIRF V.E. “Speckle image reconstruction of solar features” *Nature* **266**, 149–151, (1977)
- [74] TATARSKY V.I. *Wave propagation in a turbulent medium* Dover Publication Inc., N.Y. (1967)
- [75] TEXEREAU J. *La construction du télescope d’amateur*, Eds. *Société Astronomique de France*, Paris (1961)
- [76] VON LAUE M. *Mitt. Physik. Ges. (Zürich)* **19**, 90 (1916)
- [77] WEIGELT G. “Modified astronomical speckle interferometry, Speckle masking” *Opt. Commun.* **21**, 55–59, (1977)
- [78] WEIGELT G. “Triple correlation processing in optical astronomy” *Progress in Optics* **XXIX**, 293–319, North-Holland (1991)
- [79] WIRNITZER B. “Bispectral Analysis at low light levels and astronomical speckle masking” *J. Opt. Soc. Am. A* **2**, 14–21 (1985)

- [80] WORDEN S.P., LYNDS C.R., HARVEY J.W. “Reconstructed images of Alpha Orionis using stellar speckle inteferometry” *J. Opt. Soc. Am* **66**, 1243–1246 (1976)
- [81] WORDEN S.P., STEIN M.K., SCHMIDT G.D., ANGEL J.R.P. “The angular diameter of Vesta from speckle interferometry”, *Icarus* **32**, 450–457 (1977)