

Mémoire

présenté par

Nicolas BESSE

en vue d'obtenir le diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Contributions à l'analyse mathématique et à l'approximation numérique en physique des plasmas

Soutenue publiquement le 9 novembre 2009 devant le jury composé de MM.

Remi ABGRALL	Rapporteur	Professeur, Université de Bordeaux I, IUF
Pierre BERTRAND	Président	Professeur Émérite, Nancy-Université, Université Henri Poincaré
Yann BRENIER	Examineur	Directeur de Recherche CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis
Pierre DEGOND	Examineur	Directeur de Recherche CNRS, Université Paul Sabatier Toulouse III
Yves ELSKENS	Examineur	Professeur, Université de Provence
Dominique ESCANDE	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, Université de Provence
Xavier GARBET	Examineur	Directeur de recherche CEA, CEA-Cadarache
François GOLSE	Rapporteur	Professeur, Ecole Polytechnique
Eric SONNENDRÜCKER	Examineur	Professeur, Université de Strasbourg

à *Finéba*,

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer toute ma gratitude aux trois rapporteurs qui ont accepté d'examiner et d'évaluer mon travail : Remi Abgrall, Dominique Escande et François Golse. Je suis très honoré qu'ils aient pu donner leurs avis d'experts scientifiques sur mes travaux de recherche. Le jugement qu'ils ont porté sur ce travail a une grande valeur à mes yeux.

Je tiens, tout particulièrement, à exprimer ma reconnaissance à Pierre Bertrand pour m'avoir accueilli dans son équipe. Je le remercie pour son soutien indéfectible et son initiation aux finesses de la physique des plasmas. J'ai apprécié ses nombreuses qualités humaines, dont son enthousiasme communicatif pour la physique des plasmas et son ouverture d'esprit aux autres domaines scientifiques ou non. J'ai pu bénéficier de ses grandes compétences scientifiques, qui n'ont cessé d'inspirer mes travaux de recherches. Aussi, je suis très honoré qu'il ait accepté d'être le président de jury de mon habilitation à diriger des recherches.

Eric Sonnendrücker fut le premier compagnon d'aventure dans le monde de la recherche. J'ai toujours pu bénéficier de son soutien et d'une grande liberté de ton dans nos échanges scientifiques toujours très passionnants. Je suis très heureux qu'il participe à mon jury.

Je tiens à remercier chaleureusement Yann Brenier avec qui c'est toujours un réel plaisir de discuter mathématiques car la finesse et l'étendue de ses connaissances sont impressionnantes. Je souhaite lui exprimer ma très vive reconnaissance pour m'avoir fait partager certaines de ses nombreuses connaissances en mathématiques et physique, orienté vers la bonne littérature, pour avoir pris le temps de m'expliquer avec clarté quelques concepts et développements mathématiques, enfin pour ses conseils et ses encouragements. Sa présence dans mon jury me touche profondément.

J'adresse mes profonds remerciements à Yves Elskens et Dominique Escande avec qui j'ai beaucoup de plaisir à travailler. Leurs vastes connaissances en physique mathématique, leur rigueur, leur efficacité et leur disponibilité font de notre collaboration scientifique une expérience très enrichissante, passionnante et jubilatoire. Je les remercie chaleureusement de leur venue à Nancy.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers Xavier Garbet qui lors des réunions scientifiques à Nancy ou au CEA-Cadarache nous apporte toute son expertise dans le domaine de la physique des plasmas. Sa gentillesse, sa patience et sa maîtrise des sujets scientifiques font de nos discussions des moments passionnants et très stimulants pour l'esprit où l'on apprend beaucoup. Pouvoir travailler avec lui grâce au contrat LRC-EURATOM est une chance inestimable pour notre équipe.

Je remercie Pierre Degond pour m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Toute ma reconnaissance va également à mes autres collaborateurs auprès desquels j'ai beaucoup appris. En particulier, je tiens à remercier Alain Ghizzo et Thierry Réveillé, pour m'avoir fait partager leurs connaissances dans le domaine de l'interaction laser-plasma. J'espère sincèrement que nous continuerons notre collaboration. Je remercie chaleureusement Etienne Gravier, Pierre Morel et Rudy Klein, pour nos multiples réunions scientifiques durant lesquelles ma vision des instabilités dans les plasmas magnétisés s'est considérablement éclaircie. Je tiens tout particulièrement à remercier Philippe Bechouche et sa famille pour leurs accueils très chaleureux à Grenade et à Paris : grâce à eux j'ai découvert Grenade et sa région. Qu'il trouve ici le témoignage du plaisir que j'ai eu à travailler avec lui. Je remercie aussi Norbert

Mauser et Dietmar Kröner qui m'ont permis de travailler dans d'excellentes conditions durant mes séjours post-doctoraux à l'université de Vienne en Autriche et de Fribourg en Brisgau, en Allemagne. Je remercie également Michel Meherenberger, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler durant mon passage à l'université de Strasbourg. J'espère que nous aurons de nouveau l'occasion de travailler ensemble. Je remercie aussi Florent Berthelin pour sa précieuse collaboration. C'est également l'occasion de remercier toutes les personnes impliquées dans le Projet CALVI qu'elles se trouvent à Nancy, Strasbourg ou bien ailleurs, ainsi que les membres de l'équipe plasmas chauds de l'Institut Jean Lamour et du feu LPMIA, en particulier les deux derniers directeurs Bernard Weber et Jamal Bougdira. En particulier je souhaite exprimer ma profonde reconnaissance envers Jean-Hugues Chatenet qui partage mon bureau depuis le début et dont les conseils ont été précieux lorsque je suis arrivé à Nancy. Son humour particulier et sa grande culture scientifique font de nos discussions un véritable réjouissement. Pour finir je remercie Daniele Del Sarto, qui apporte dans notre bureau sa vision toscane à nos échanges scientifiques, philosophiques et culinaires ; je n'oublie pas Xavier Caron et sa liberté d'esprit.

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Domaines de recherche	12
1.2	Publications	13
2	Modèles water-bag pour les plasmas cinétiques non collisionnels	15
2.1	Introduction	16
2.2	Le modèle water-bag dans un espace des phases à deux dimensions	17
2.3	Dérivation de modèles water-bag	18
2.4	Le problème de Cauchy	21
2.4.1	Le modèle water-bag-Poisson	21
2.4.1.1	Cas d'un nombre fini de bag	21
2.4.1.2	Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag	22
2.4.1.3	Cas d'un continuum de bag	22
2.4.2	Le modèle water-bag-quasi-neutre	23
2.4.2.1	Cas d'un nombre fini de bag	23
2.4.2.2	Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag	25
2.4.2.3	Cas d'un continuum de bag	25
2.4.3	Le modèle water-bag-électromagnétique	29
2.4.3.1	Cas d'un nombre fini de bag	29
2.4.3.2	Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag	29
2.4.3.3	Cas d'un continuum de bag	29
2.5	Approximation numérique	30
2.5.1	Schémas numériques	31
2.5.1.1	Discretisation des équations water-bag	31
2.5.1.2	Discretisation de l'équation de quasi-neutralité	32
2.5.1.3	Discretisation de l'équation de Poisson	32
2.5.1.4	Discretisation de l'équation des ondes	33
2.6	Résultats numériques	34
2.6.1	Construction d'un équilibre water-bag	34
2.6.2	Amortissement Landau des ondes de Langmuir	35
2.6.3	Amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques	35
2.6.4	Décalage non linéaire de la fréquence Bohm-Gross d'une onde plasma	36
2.6.5	Modes de Van Kampen	37
2.6.6	L'instabilité de diffusion Raman stimulée dans l'interaction laser-plasma	38
2.6.7	Les ondes non linéaires électrostatiques d'électrons cinétiques	39
3	Modèles gyro-water-bag pour les plasmas magnétisés	43
3.1	Introduction	44
3.2	L'équation gyrocinétique	44
3.3	Le modèle gyro-water-bag	46
3.4	Invariants de Liouville et réduction de l'espace des phases	47
3.5	Analyse linéaire	48
3.5.1	Relation de dispersion	48
3.5.2	Construction d'un équilibre local	49

3.5.3	Seuil d'instabilité et taux de croissance	50
3.6	Analyse quasi-linéaire	50
3.7	Le problème de Cauchy	54
3.8	Normalisation et lois de conservation	55
3.9	Dérivation d'un modèle gyro-water-bag auto-cohérent	56
3.10	Approximation numérique	57
3.10.1	Approximation numérique du système non linéaire	57
3.10.2	Approximation numérique du système quasi-linéaire	60
3.11	Résultats numériques	64
3.11.1	Construction d'un équilibre gyro-water-bag	64
3.11.2	Instabilité ITG et turbulence gyrocinétique dans un cylindre	65
4	Analyse mathématique de quelques méthodes numériques	73
4.1	Introduction	74
4.2	Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Poisson	74
4.2.1	Introduction	74
4.2.2	Le problème continu	75
4.2.2.1	Le modèle de Vlasov-Poisson	75
4.2.2.2	Problème de Cauchy	76
4.2.3	Le problème discret	77
4.2.3.1	Définitions et notations	77
4.2.3.2	Le schéma numérique	78
4.2.4	Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori	79
4.3	Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Einstein	80
4.3.1	Introduction	80
4.3.2	Le problème continu	82
4.3.3	Le problème discret	85
4.3.3.1	Schéma d'ordre un en temps	85
4.3.3.2	Schéma d'ordre deux en temps	86
4.3.3.3	Analyse multi-résolution de H^s en ondelettes	86
4.3.4	Théorèmes de convergence et estimations d'erreurs a priori	87
4.4	Méthodes de Runge-Kutta-Galerkin-discontinu conservant localement $\nabla \cdot B = 0$ pour l'équation d'induction de la MHD	88
4.4.1	Introduction	88
4.4.2	Le schéma numérique	89
4.4.2.1	La formulation de Friedrichs	89
4.4.2.2	Les espaces d'approximation	89
4.4.2.3	La méthode de Galerkin-discontinu	90
4.4.3	Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori	91
5	Approximation numérique de quelques équations de Vlasov	93
5.1	Introduction	94
5.2	Les modèles de Vlasov-Darwin et Vlasov-Poisswell	94
5.2.1	Le modèle de Darwin	94
5.2.2	Le modèle de "Poisswell"	95
5.2.3	Approximation numérique	96
5.2.3.1	La méthode semi-Lagrangienne avec splitting	96
5.2.3.2	Les particularités du modèle Vlasov-{Darwin,Poisswell}	98
5.2.4	L'instabilité faisceau-plasma électromagnétique	99
5.3	Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste	99
5.3.1	Introduction	99
5.3.2	Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste	101
5.3.3	L'analyse multi-résolution de L^2 en ondelettes	102
5.3.4	Approximation numérique adaptative	104
5.3.5	Simulations de l'interaction laser-plasma	106
5.3.5.1	L'instabilité paramétrique relativiste	106

5.3.5.2	La transparence auto-induite et les ondes KEEN	107
5.3.5.3	Champ de sillage d'une onde laser et accélération relativiste de particules	109
5.3.6	Analyse de performance	110
5.4	Le modèle de Vlasov-gyrocinétique	111
5.4.1	Introduction	111
5.4.2	Approximation numérique	112
5.4.3	Instabilité ITG	113
5.4.3.1	Régime linéaire	113
5.4.3.2	Régime non linéaire	114
	Conclusions et perspectives	117
	Bibliographie	117

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Domaines de recherche	12
1.2	Publications	13

1.1 Domaines de recherche

Mes travaux de recherche concernent la modélisation, l'analyse mathématique, l'analyse numérique et le calcul scientifique autour d'équations aux dérivées partielles qui interviennent dans les processus de transport de particules chargées et en physique des plasmas.

L'état plasma peut être considéré comme le quatrième état de la matière, obtenu par exemple en portant un gaz à très haute température. L'énergie d'agitation thermique des molécules et atomes constituant le gaz est alors suffisante pour déclencher le phénomène d'ionisation lors des collisions entre ces particules. On obtient alors un gaz globalement neutre composé de particules chargées et de particules neutres que l'on appelle plasma. La présence de particules chargées implique l'existence d'interaction à longue portée (interaction Coulombienne) mettant en oeuvre un grand nombre de particules constituant ce que l'on appelle les phénomènes collectifs. Ces phénomènes collectifs sont le siège d'un grand nombre de phénomènes complexes, non linéaires et multi-échelles (dynamique non-linéaire, interaction résonante ondes-particules, couplage ondes-ondes, transport turbulent, collisions,...). La physique de ces modèles étant trop complexe pour en donner une description analytique complète nous devons avoir recours à la simulation numérique. Les modèles les plus complets utilisés en physique des plasmas sont les modèles de Vlasov-Maxwell auxquels on doit ajouter dans certains cas des effets collisionnels (opérateurs de collision : Fokker-Planck, Landau, Boltzmann, Balescu-Lenard, ...). L'équation de Vlasov est posée dans l'espace des phases à six dimensions. Le modèle complet est donc très difficile à simuler numériquement, malgré une puissance de calcul qui ne cesse d'augmenter. Pour cette raison, on doit faire un effort de modélisation pour trouver un modèle réduit adapté au problème physique considéré. Les modèles que l'on considère représentent une situation physique assez générale. Ils peuvent souvent être simplifiés en prenant en compte des propriétés particulières liées à la géométrie du problème traité (symétries, invariants géométriques, invariants physiques, invariants adiabatiques) où à la petitesse de certains paramètres (phénomènes physiques multi-échelles). Il faut donc construire et justifier de nouveaux modèles réduits par rapport aux modèles de départ en prenant en compte ces propriétés particulières. Un objectif essentiel est de développer des outils de simulation robustes et efficaces pour la physique des plasmas chauds (interaction laser-plasma, plasma de fusion de tokamaks, fusion par confinement inertiel : projet national du laser megajoule, fusion par confinement magnétique : projet international ITER). Une attention particulière est apportée aux méthodes permettant de résoudre l'équation de Vlasov sur un maillage fixe ou adaptatif de l'espace des phases et au traitement de géométries complexes (géométrie torique des tokamaks). La grande taille des problèmes étudiés nécessite des méthodes mathématiques et informatiques évoluées dont la mise en oeuvre est complexe. En particulier la parallélisation efficace sur un grand nombre de processeurs est indispensable.

Dans les chapitres 2 et 3, on présente une méthode de réduction de l'équation de Vlasov basée sur les invariants géométriques de Liouville. Le modèle réduit obtenu, que l'on appelle "water-bag", est couplé avec différentes équations du champ électromagnétique (équation de Poisson, équation quasi-neutre, équations de Maxwell). Le chapitre 2 contient une analyse mathématique de ces modèles ainsi que leurs approximations numériques avec des résultats de simulations numériques dans le domaine de la physique des plasmas fondamentale. Ce concept de réduction est appliqué dans le chapitre 3 aux équations gyrocinétiques de Vlasov pour donner le modèle gyro-water-bag. L'analyse mathématique du modèle réduit gyro-water-bag (analyse linéaire, analyse quasi-linéaire, problème de Cauchy) donne lieu à de nombreux résultats analytiques (seuils d'instabilité, taux de croissance des instabilités, coefficients de transport, estimations de la diffusion turbulente, mécanismes non linéaires de la turbulence, existence et unicité des solutions) très importants tant du point de vue physique que mathématique. Des schémas numériques sont alors mis en oeuvre pour résoudre numériquement ces modèles. Des simulations numériques sont ensuite réalisées pour étudier la turbulence dans les plasmas magnétisés. En effet les plasmas magnétisés sont le siège de nombreuses instabilités générées par la présence de forts gradients de densité et de température. Ces instabilités engendrent un transport turbulent dit "anormal" des particules et de l'énergie qui détériore le confinement du plasma où les conditions nécessaires à la fusion peuvent ne plus être réalisées. Le calcul numérique des

diffusivités thermiques turbulentes est primordial puisque le temps de confinement de l'énergie est déterminé par ces coefficients de transport.

Le chapitre 4 regroupe l'analyse mathématique (preuve de convergence et estimations d'erreurs a priori) de plusieurs méthodes numériques d'ordre élevé utilisées pour résoudre les systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Einstein ainsi que l'équation d'induction du système de la MHD idéale.

Enfin le chapitre 5 présente des méthodes numériques originales pour résoudre plusieurs équations de Vlasov non linéaires (Vlasov-Poisson, Vlasov-Darwin, Vlasov-Maxwell et Vlasov-gyrocinétique) qui interviennent soit dans les plasmas de fusion par confinement magnétique où on étudie la turbulence gyrocinétique, soit dans les plasmas de fusion par confinement inertiel où on étudie l'interaction laser-plasma à haut flux.

1.2 Publications

Publications référées dans des revues internationales

- [A01] N. Besse, E. Sonnendrücker, *Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space*, J. Comput. Phys., **191** (2003), 341-376.
- [A02] N. Besse, *Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one-dimensional Vlasov-Poisson system*, SIAM J. Numer. Anal., **42** (2004), 350-382.
- [A03] N. Besse, J. Segré, E. Sonnendrücker, *Semi-Lagrangian schemes for the two-dimensional Vlasov-Poisson system on unstructured meshes*, Trans. Theo. Stat. Phys., **34** (2005), 311-332.
- [A04] N. Besse, D. Kröner, *Convergence of locally divergence-free discontinuous-Galerkin methods for the induction equations system of the 2D-MHD* ESAIM : M2AN, **39** (2005), 1177-1202.
- [A05] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrücker, J. Vaclavik, L. Villard, *A drift-kinetic Semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation*, J. Comput. Phys., **217** (2006), 395-423.
- [A06] Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, E. Fleurence, X. Garbet, Ph. Ghendrih, P. Bertrand, N. Besse, N. Crouseilles, E. Sonnendrücker, G. Latu, E. Violard, *Impact of large scale flows on turbulent transport*, Plasma Phys. Control. Fusion, **48** (2006), B179-B188.
- [A07] N. Besse, N.J. Mauser, E. Sonnendrücker, *Numerical approximation of self-consistent Vlasov models for low-frequency electromagnetic phenomena*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **17** (2007), 361-374.
- [A08] A. Ghizzo, D. Del Sarto, T. Réveillé, N. Besse, R. Klein, *Self-transparency scenario revisited via the beating of the pump wave and its reflected wave in one dimensional moderately overdense plasma layer*, Phys. Plasmas, **14** (2007), 062702.
- [A09] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, A. Ghizzo, P. Bertrand, *The water bag model and gyrokinetic applications*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008), 11-17.
- [A10] X. Garbet, Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, G. Darmet, Ph. Ghendrih, P. Angelino, P. Bertrand, N. Besse, E. Gravier, P. Morel, E. Sonnendrücker, N. Crouseilles, J-M. Dischler, G. Latu, E. Violard, M. Brunetti, S. Brunner, X. Lapillonne, T.-M. Tran, L. Villard, M. Boulet, *Beyond scale separation in gyrokinetic turbulence*, Nucl. Fusion, **47** (2007), 1206-1212.
- [A11] A. Ghizzo, D. Del Sarto, T. Réveillé, N. Besse, P. Bertrand, *Application of a semi-Lagrangian scheme in the relativistic regime of laser interaction with an overdense plasma slab*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008), 59-64.
- [A12] N. Besse, M. Mehrenberger, *Convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system*, Math. Comp., **77** (2008), 93-123.
- [A13] V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, G. Dif-Pradalier, Ph. Ghendrih, N. Crouseilles, G. Latu, E. Sonnendrücker, N. Besse and P. Bertrand, *Computing ITG turbulence with a full-f semi-Lagrangian code* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008),

- 81-87.
- [A14] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, A. Ghizzo, P. Bertrand, X. Garbet, Ph. Gendrih, V. Grandgirard, Y. Sarazin, *Gyrokinetic modelling : a multi water bag approach*, Phys. Plasmas, **14** (2007), 112109.
 - [A15] N. Besse, *Convergence of a high-order semi-Lagrangian scheme with propagation of gradients for the Vlasov-Poisson system*, SIAM, J. Numer. Anal., **46** (2008), 639-670.
 - [A16] N. Besse, G. Latu, A. Ghizzo, E. Sonnendrücker, P. Bertrand, *A Wavelet-MRA-based adaptive semi-lagrangian method for the relativistic Vlasov-Maxwell system*, J. Comput. Phys., **227** (2008), 7889-7916.
 - [A17] N. Besse, P. Bertrand, *Quasilinear analysis of the gyro-water-bag model*, Europhys. Lett., **83** (2008), 25003.
 - [A18] N. Besse, P. Bertrand, P. Morel, E. Gravier, *Weak turbulence theory and simulation of the gyro-water-bag model*, Phys. Rev. E, **77** (2008), 056410.
 - [A19] E. Gravier, R. Klein, P. Morel, N. Besse, P. Bertrand, *Gyrokinetic-water-bag modeling of low-frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column*, Phys. Plasmas, **15** (2008), 122103.
 - [A20] N. Besse, F. Berthelin, Y. Brenier, P. Bertrand, *The multi-water-bag equations for collisionless kinetic modeling*, Kinetic and Related Models, **2** (2009), 39-90
 - [A21] N. Besse, P. Bertrand, *The gyro-water-bag approach in nonlinear gyrokinetic turbulence*, J. Comput. Phys., **228** (2009), 3973-3995.
 - [A22] R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, P. Bertrand, *Gyrokinetic water-bag modeling of a plasma column : magnetic moment distribution and finite Larmor radius effects*, Phys. Plasmas **16** (2009), 082106.
 - [A23] P. Bechouche, N. Besse, *Analysis of a semi-Lagrangian method for the spherically symmetric Vlasov-Einstein system*, Accepté dans ESAIM : M2AN.
 - [A24] N. Besse, *On the Cauchy problem for the gyro-water-bag model*, soumis.
 - [A25] N. Besse, *On the water-bag continuum*, soumis.
 - [A26] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, P. Bertrand, X. Garbet, *Water bag modeling of a multispecies plasma*, soumis.

Publications référées dans des chapitres de livre ou des proceedings

- [P01] N. Besse, F. Filbet, M. Gutnic, I. Paun, E. Sonnendrücker, *An adaptive numerical method for the Vlasov equation based on a multiresolution analysis*, Numerical Mathematics and Advanced Applications, Eds F. Brezzi, A. Buffa, S. Escorsaro, A. Murli, Springer, (2003), 437-446, ENUMATH 2001.

Chapitre 2

Modèles water-bag pour les plasmas cinétiques non collisionnels

Sommaire

2.1	Introduction	16
2.2	Le modèle water-bag dans un espace des phases à deux dimensions	17
2.3	Dérivation de modèles water-bag	18
2.4	Le problème de Cauchy	21
2.4.1	Le modèle water-bag-Poisson	21
2.4.2	Le modèle water-bag-quasi-neutre	23
2.4.3	Le modèle water-bag-électromagnétique	29
2.5	Approximation numérique	30
2.5.1	Schémas numériques	31
2.6	Résultats numériques	34
2.6.1	Construction d'un équilibre water-bag	34
2.6.2	Amortissement Landau des ondes de Langmuir	35
2.6.3	Amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques	35
2.6.4	Décalage non linéaire de la fréquence Bohm-Gross d'une onde plasma	36
2.6.5	Modes de Van Kampen	37
2.6.6	L'instabilité de diffusion Raman stimulée dans l'interaction laser-plasma	38
2.6.7	Les ondes non linéaires électrostatiques d'électrons cinétiques	39

2.1 Introduction

L'équation de Vlasov est une équation difficile à traiter à cause de sa dimensionalité. Pour chaque espèce de particules la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est définie dans un espace à six dimensions. Même dans le plus simple des cas (une dimension de vitesse et une dimension d'espace) l'espace est à deux dimensions. Une question pertinente est de savoir si ce type de modèle peut être réduit au seul espace physique comme en hydrodynamique. Dans ce dernier cas la présence de collisions avec des fréquences plus grande que l'inverse de tous les autres échelles de temps caractéristiques implique l'existence d'un équilibre thermodynamique local caractérisé par une densité $n(\mathbf{r}, t)$, une vitesse moyenne $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et une température $T(\mathbf{r}, t)$. Mais la présence de phénomènes collectifs dans un plasma ne permet pas de déduire l'existence d'un équilibre thermodynamique local. Par conséquent la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ est a priori une fonction arbitraire de \mathbf{r} et \mathbf{v} (et t bien sûr) et la résolution d'une équation de transport dans l'espace des phases devient inévitable.

Une approche alternative est basée sur la représentation water-bag de la fonction de distribution qui n'est pas une approximation de la fonction de distribution mais plutôt une classe spéciale de conditions initiales. Initialement introduit par DePackh [85], Hohl, Feix et Bertrand [104, 24, 25], le water-bag fournit le lien entre la description fluide et cinétique d'un plasma sans collisions, tout en conservant les caractères et les propriétés cinétiques du problème avec un coût semblable à celui d'un système multi-fluides. Vingt ans plus tard les mathématiciens ont redécouvert cette propriété en utilisant la formulation cinétique des lois de conservation hyperboliques. Il a été démontré dans [49, 50, 51, 122] que les lois de conservation scalaires non linéaires peuvent être réécrites comme des équations hyperboliques linéaires en introduisant une variable supplémentaire $\xi \in \mathbb{R}$ qui peut être interprétée comme une variable scalaire de vitesse ou d'impulsion. Dans [51], l'auteur a proposé un schéma numérique, appelé la méthode "transport-écroulement", pour résoudre cette équation linéaire et a prouvé, en utilisant des estimations BV et une analyse à la Kruzhkov, que la solution numérique du schéma converge vers la solution entropique d'une loi de conservation scalaire. Ce résultat a été aussi démontré dans [213] en utilisant les lemmes de moyennes [125, 126, 93, 44] sans estimations BV. Bien après [184, 163], il a été montré que sans approximation, les solutions entropiques des lois de conservation scalaires pouvaient être directement écrites sous forme cinétique, connue sous le nom de formulation cinétique des lois de conservation hyperboliques scalaires. La généralisation aux systèmes de lois de conservation semble impossible excepté pour certains systèmes particuliers ([53, 164, 214, 16, 17, 18]) où la formulation cinétique de solutions entropiques multi-branches (multi-valuées) a été développée. Un de ces systèmes est le système de la dynamique isentropique des gaz avec $\gamma = 3$ pour lequel le lien avec l'équation cinétique de Vlasov avait déjà été mis en avant [24] et avait donné lieu à la naissance du modèle water-bag. Notons que le concept de solutions entropiques multi-branches a été utilisé pour étudier la propagation des ondes à hautes fréquence via l'approximation de l'optique géométrique multi-valuée [128, 129, 148, 130]. Dans ce chapitre nous traiterons trois modèles water-bag différents suivant l'équation décrivant le champ électromagnétique nécessaire à l'auto-cohérence du système. Le premier est le modèle water-bag-Poisson (WBP) qui correspond à une classe spéciale de solution faible exacte du système de Vlasov-Poisson et donc constitue le modèle de base pour la modélisation cinétique des plasmas sans collisions. Le second modèle est le modèle water-bag-quasi-neutre (WBQN) où le couplage entre les ondes et les particules se fait en égalant la densité au potentiel électrique. Ce système est très riche et pertinent car il décrit la dynamique parallèle des particules soumises à un fort champ magnétique, comme c'est le cas dans les plasmas de tokamak (chambre de forme toroïdale où les réactions de fusion thermonucléaire sont réalisées par un confinement magnétique des particules) où la turbulence gyrocinétique détermine le temps de confinement de l'énergie [171, 172, 38, 40]. Un troisième modèle est le modèle water-bag-électromagnétique (WBE) qui est très fécond pour l'interaction laser-plasma parce qu'il donne une explication de la formation de structures cohérentes non linéaires à basse fréquence qui sont très stables en temps long et qu'on appelle ondes KEEN (Kinetic Electron Electrostatic Nonlinear) [1, 2, 115, 36]. Ces modes KEEN, qui ont été observés dans plusieurs simulations numériques [1, 2, 115, 36], peuvent être vus comme une variation non stationnaire des modes

BGK (Bernstein-Greene-Kruskal) [26], décrivant les ondes électrostatiques progressives invariantes dans les plasmas.

2.2 Le modèle water-bag dans un espace des phases à deux dimensions

Afin d'introduire le modèle water-bag considérons un plasma à une dimension (espace des phases à deux dimensions (z, v)) dans lequel à l'instant initial la situation est décrite par la figure 2.1. Entre les deux courbes v^+ et v^- on impose $f(t, z, v) = \mathcal{A}$ (\mathcal{A} est une constante). Pour les vitesses plus grandes que v^+ et plus petites que v^- on a $f(t, z, v) = 0$.

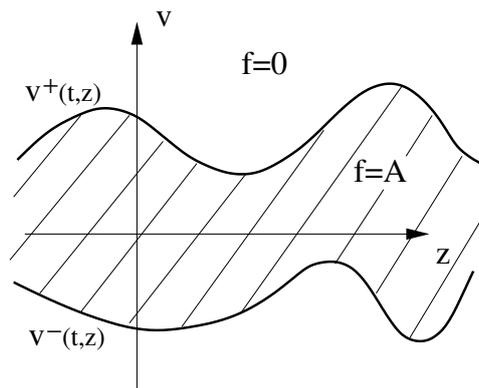


FIGURE 2.1 – Le modèle water-bag dans l'espace des phases.

Selon la propriété d'incompressibilité de l'espace des phases (conservation de la mesure et de la connexité d'un volume élémentaire de l'espace des phases qui se déforme sous l'action du flot Lagrangien), tant que les contours v^+ et v^- restent des fonctions mono-valuées $f(t, z, v)$ reste égal à A pour les valeurs de v telles que $v^-(t, z) < v < v^+(t, z)$. Alors le problème est entièrement décrit par les deux fonctions v^+ et v^- . Puisque la description hydrodynamique fait intervenir les quantités n , u et P (respectivement la densité, la vitesse moyenne et la pression) on peut réécrire le modèle water-bag dans le cadre de l'hydrodynamique avec en supplément une équation d'état donnée sans avoir recours à une fermeture a posteriori ou phénoménologique.

En se rappelant qu'une particule qui se trouve sur le contour v^+ (ou v^-) reste sur ce contour les équations pour v^+ et v^- sont (en l'occurrence pour un plasma d'électrons, E étant le champ électrique et q la charge électrique)

$$D_t v^\pm(t, z) = \partial_t v^\pm(t, z) + (v^\pm \partial_z v^\pm)(t, z) = \frac{q}{m} E(t, z). \quad (2.1)$$

Maintenant on introduit la densité $n(t, z) = \mathcal{A}(v^+ - v^-)$ et la vitesse moyenne (fluide) $u(t, z) = \frac{1}{2}(v^+ + v^-)$ dans les équations (2.1). En ajoutant et soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\partial_t n + \partial_z(nu) = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t u + u \partial_z u = -\frac{1}{mn} \partial_z P + \frac{q}{m} E, \quad (2.3)$$

$$P n^{-3} = \frac{m}{12 \mathcal{A}^2}. \quad (2.4)$$

Les équations (2.2)-(2.3)-(2.4) sont respectivement les équations de continuité, d'Euler et d'état. La formulation hydrodynamique du modèle water-bag a été mis en évidence pour la première fois par Bertrand et Feix [24, 135].

En linéarisant l'équation (2.1) autour d'un équilibre homogène, i.e. $v^\pm(t, z) = \pm a + w^\pm(t, z)$ pour un plasma électronique, on obtient la relation de dispersion pour une perturbation harmonique $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 a^2$. De plus en calculant la vitesse thermique

$$v_{th}^2 = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f_0(v) dv = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} v^2 dv = \frac{a^2}{3}$$

on retrouve exactement la relation de dispersion de Bohm-Gross $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2$.

Il est alors facile de construire le water-bag associé à une fonction de distribution homogène caractérisée par la densité n_0 et la vitesse thermique v_{th} : on doit juste choisir les paramètres water-bag (a et \mathcal{A}) comme il suit

$$a = \sqrt{3} v_{th} \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = n_0 / 2a. \quad (2.5)$$

Bien sûr il n'y a pas de résonance Landau puisque la vitesse de phase est telle que $v_\varphi = \sqrt{a^2 + \omega_p^2 / k^2} > a$. Pour retrouver l'effet Landau (interaction onde-particule) le modèle water-bag doit être généralisé en modèle water-bag multiple (plusieurs contours).

Notons qu'après un temps fini, les équations (2.1) ou le système (2.2)-(2.3) peuvent générer des chocs, i.e. des gradients discontinus en z pour v^\pm , n et u . Cependant le concept de solutions entropiques n'est pas bien adapté ici car l'existence d'une inégalité d'entropie implique l'existence d'un processus de type diffusif ou collisionnel au second membre de l'équation de Vlasov. Cette observation a été développée dans la théorie de la formulation cinétique des lois de conservation scalaires [50, 51, 184, 163, 164, 53]. En fait une dérivée partielle (d'un certain ordre) par rapport à la variable de vitesse d'une mesure positive bornée apparaît au second membre d'une équation cinétique linéaire (transport libre), ce qui est la signature d'un processus diffusif en vitesse. Afin que le modèle water-bag soit équivalent à l'équation de Vlasov (sans terme de type diffusif ou collisionnel au second membre), on doit considérer des solutions multi-valuées au-delà de la première singularité. L'apparition d'une singularité (gradients discontinus en z dus au terme de Burgers) est liée à l'apparition progressive de particules piégées qui est caractérisée par la formation de vortex (phénomène de "wave-breaking" ou de déferlement d'onde) et le développement du processus de filamentation de l'espace des phases. Dans certains cas physiques comme l'étude non linéaire de la turbulence gyrocinétique dans un cylindre [131, 38], les propriétés de la dynamique des particules [142] impliquent qu'il n'y a pas de particules piégées mais que des passantes, et que les processus de filamentation et de déferlement d'onde ne sont pas les mécanismes dominants [171, 172, 38].

2.3 Dérivation de modèles water-bag

La généralisation du water-bag à plusieurs contours est directe [179, 20, 23]. Berk et Roberts [13] et Finzi [105] ont utilisé un double water-bag pour étudier l'instabilité double-faisceaux dans des simulations numériques qui incluent la filamentation des contours et leur nature multi-valuée (un problème très difficile sur le plan de la programmation numérique)

Considérons $2\mathcal{N}$ contours dans l'espace des phases représentés par v_j^+ et v_j^- (où $j = 1, \dots, \mathcal{N}$). La figure 2.2 montre les contours dans l'espace des phases pour un système de trois bags ($\mathcal{N} = 3$) où la fonction de distribution prend trois valeurs constantes différentes F_1 , F_2 et F_3 .

En introduisant les hauteurs des bags \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 comme dans la figure 2.2 la fonction de distribution s'écrit

$$f(t, z, v) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j \left(\mathcal{H}(v_j^+(t, z) - v) - \mathcal{H}(v_j^-(t, z) - v) \right), \quad (2.6)$$

où \mathcal{H} est la fonction d'Heaviside. Notons que les constantes \mathcal{A}_j peuvent être négatives. La fonction de distribution (2.6) est une solution faible de l'équation de Vlasov (au sens des distributions), si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites

$$\partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \frac{q}{m} \partial_z \phi = 0, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (2.7)$$

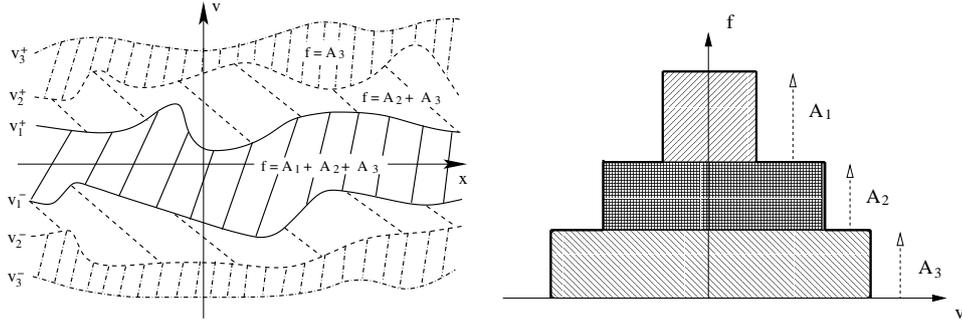


FIGURE 2.2 – Le water-bag multiple : l'espace des phases pour un modèle à trois bags (gauche) et la fonction de distribution water-bag correspondante (droite).

où ϕ est le potentiel électrique avec $E = -\partial_z \phi$. Introduisons maintenant pour chaque bag j la densité n_j , la vitesse moyenne u_j et la pression P_j comme pour le cas d'un seul bag décrit plus haut $n_j = \mathcal{A}_j(v_j^+ - v_j^-)$, $u_j = (v_j^+ + v_j^-)/2$ et $P_j n_j^{-3} = m/(12\mathcal{A}_j^2)$. Pour chaque bag j nous retrouvons la forme conservative des équations de continuité et d'Euler (système de la dynamique isentropique des gaz avec $\gamma = 3$)

$$\partial_t n_j + \partial_z(n_j u_j) = 0, \quad (2.8)$$

$$\partial_t(n_j u_j) + \partial_z \left(n_j u_j^2 + \frac{P_j}{m} \right) + \frac{q}{m} n_j \partial_z \phi = 0. \quad (2.9)$$

Le couplage entre les bags est donné par la densité totale $\sum_{j \leq \mathcal{N}} n_j$ via l'équation de Poisson (ondes électroniques hautes fréquences de Langmuir)

$$-\partial_z^2 \phi = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(n_{i0} - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j \right), \quad (2.10)$$

avec e la charge élémentaire n_{i0} un fond d'ions fixes neutralisant. Pour les ondes acoustiques ioniques dans la limite des grandes longueurs d'ondes, le Laplacien peut être supprimé dans l'équation de Poisson, conduisant à l'équation de quasi-neutralité

$$Z_i n_i = Z_i \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j = n_e, \quad (2.11)$$

avec Z_i le nombre de charge. Si on suppose que la densité électronique n_e suit une distribution Maxwell-Boltzmann (électrons adiabatiques) $n_{e0} \exp(e\phi/(k_B T_e))$, et si on suppose le rapport $e\phi/(k_B T_e) \ll 1$, alors au premier ordre en $e\phi/(k_B T_e)$ l'équation de quasi-neutralité (2.11) devient

$$\phi = \frac{k_B T_e}{n_{e0} e} \left(Z_i \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j - n_{e0} \right). \quad (2.12)$$

La linéarisation des équations (2.8)-(2.10) pour un plasma électronique autour d'un équilibre homogène (densité n_0) i.e. $v_j^\pm(t, z) = \pm v_{0j} + \delta v_j^\pm(t, z)$ avec $|\delta v_j^\pm| \ll v_{0j}$ donne la relation de dispersion

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{n_0} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \frac{2v_{0j} \mathcal{A}_j}{\omega^2 - k^2 v_{0j}^2} = 0. \quad (2.13)$$

Si tous les \mathcal{A}_j sont positifs (fonction de distribution avec une seule bosse ou fonction unimodale) cette équation a $2\mathcal{N}$ racines réelles, chacune étant localisée entre deux bags. L'effet Landau est obtenu par un processus de mélange des fréquences réelles [179, 22] comme dans le traitement des oscillations d'un plasma électronique par Van Kampen et Case [212, 58].

Introduisons maintenant le water-bag électromagnétique pour étudier l'interaction laser-plasma par exemple. On cherche à décrire le comportement d'une onde électromagnétique qui se propage dans un gaz d'électrons relativistes et d'ions fixes neutralisant. Ici on considère un plasma unidimensionnel le long de la direction z . Plus précisément, on suppose que les ondes qui interagissent avec le plasma sont des ondes planes se propageant dans la direction z . Puisque les effets cinétiques sont importants dans l'interaction laser-plasma, on choisit une description cinétique pour le plasma ce qui implique de résoudre l'équation de Vlasov pour une fonction de distribution $\mathcal{F} = \mathcal{F}(t, z, p_z, p_\perp)$ à quatre dimensions

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{p_z}{m\gamma} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + e \left(E + \frac{p \times B}{m\gamma} \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = 0, \quad (2.14)$$

où $p = (p_z, p_\perp) = (p_z, p_{\perp 1}, p_{\perp 2})$ représentent les variables d'impulsion, (E, B) le champ électromagnétique et γ le facteur de Lorentz tel que $\gamma^2 = 1 + (p_\perp^2 + p_z^2)/m^2c^2$. Maintenant nous cherchons à réduire l'équation de Vlasov à quatre dimensions en utilisant les invariants du système. L'Hamiltonien pour une particule relativiste dans un champ électromagnétique (E, B) à une dimension spatiale est donné par $\mathcal{H} = mc^2 \sqrt{1 + (P_c - eA)^2/(m^2c^2)} + e\phi(t, z)$ où ϕ est le potentiel électrostatique, A le potentiel vecteur, et P_c le moment canonique lié à l'impulsion de la particule p par $P_c = p + eA$. Afin que le champ électromagnétique soit bien défini par les potentiels on doit ajouter une jauge. On choisit la jauge de Coulomb ($\text{div } A = 0$), qui implique que $A = A_\perp(t, z)$. En écrivant les équations d'Hamilton $dP_c/dt = -\partial_q \mathcal{H}$, le long de la direction z de propagation des ondes électromagnétiques on obtient $dP_{cz}/dt = -\partial_z \mathcal{H}$, alors que pour la direction transverse $dP_{c\perp}/dt = -\partial_\perp \mathcal{H} = 0$. La dernière équation signifie que $P_{c\perp} = \text{constante} = \mathcal{P}_{c\perp}$ et donc que $P_{c\perp}$ n'est plus une variable indépendante mais un paramètre. Alors la structure de la solution est de la forme

$$\mathcal{F}(t, z, p_z, p_\perp) = \int_{\mathcal{P}_{c\perp}} f(t, z, p_z, \mathcal{P}_{c\perp}) \delta(p_\perp - (\mathcal{P}_{c\perp} - eA_\perp)) d\mathcal{P}_{c\perp},$$

où $\mathcal{P}_{c\perp}$ doit être vu comme un paramètre ou un indice d'indexation. Ensuite, sans perte de généralité, on peut considérer qu'initialement le plasma est préparé de telle sorte que les particules sont divisées en \mathcal{M} groupes de particules, chaque groupe i , $1 \leq i \leq \mathcal{M}$, ayant le même moment canonique initial $P_{c\perp} = \mathcal{P}_{c\perp, i}$. Les particules du groupe i ont une impulsion longitudinale p_z distribuée selon la fonction de distribution $f_i(t, z, p_z)$. L'Hamiltonien d'une particule du groupe i est donné par $\mathcal{H}_i(t, z, p_z) = mc^2(\gamma_i(t, z, p_z) - 1) + e\phi(t, z)$ avec le facteur de Lorentz correspondant $\gamma_i^2 = 1 + p_z^2/(m^2c^2) + (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp(t, z))^2/(m^2c^2)$. Chaque groupe i est décrit par la fonction de distribution $f_i(t, z, p_z)$ régit par l'équation de Vlasov $\partial_t f_i + [\mathcal{H}_i, f_i] = 0$, $i = 1, \dots, \mathcal{M}$, où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Poisson dans les variables (z, p_z) , i.e. $[\varphi, \psi] = \partial_{p_z} \varphi \partial_z \psi - \partial_z \varphi \partial_{p_z} \psi$. La structure de la solution est alors maintenant de la forme $\mathcal{F}(t, z, p_z, p_\perp) = \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} f_i(t, z, p_z) \delta(p_\perp - (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp))$. Nous supposons ensuite que chaque fonction de distribution $f_i(t, z, p_z)$ à la structure d'un water-bag multiple

$$f_i(t, z, p_z) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{ij} \left(\mathcal{H}(p_{ij}^+(t, z) - p_z) - \mathcal{H}(p_{ij}^-(t, z) - p_z) \right). \quad (2.15)$$

En introduisant l'équation (2.15) dans les équations de Vlasov $\partial_t f_i + [\mathcal{H}_i, f_i] = 0$, $i = 1, \dots, \mathcal{M}$, on obtient pour $i = 1, \dots, \mathcal{M}$ et $j = 1, \dots, \mathcal{N}$, les équations water-bag suivantes

$$\partial_t p_{ij}^\pm + \frac{p_{ij}^\pm}{m\gamma_{ij}^\pm} \partial_z p_{ij}^\pm + \left(eE_z + \frac{1}{2m\gamma_{ij}^\pm} \partial_z (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp(t, z))^2 \right) = 0,$$

où $\gamma_{ij}^\pm = \sqrt{1 + p_{ij}^{\pm 2}/(m^2c^2) + (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp(t, z))^2/(m^2c^2)}$. On ajoute maintenant les équations de Maxwell qui couplent les différentes fonctions de distribution f_i via le potentiel scalaire ϕ et le potentiel vecteur A_\perp . Le modèle de propagation d'onde plane permet de séparer le champ électrique en deux parties, $E = E_z \mathbf{e}_z + E_\perp$ où $E_z = -\partial_z \phi$ est purement électrostatique et est régi par une équation de Poisson, et où $E_\perp = -\partial_t A_\perp$ est purement électromagnétique. En

l'absence de champ magnétique externe, le champ magnétique B est purement perpendiculaire et est donné par l'équation $B_\perp = \nabla \times A_\perp$. Les deux autres équations couplent les fonctions de distribution f_i . L'équation de Maxwell-Gauss $\partial_z E_z = \rho/\varepsilon_0$ devient

$$\partial_z E_z = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{M}} n_i(t, z) - n_0 \right),$$

où la densité de charge n_i du groupe i est définie par

$$n_i(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, z, p_z) dp_z = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{ij} (p_{ij}^+(t, z) - p_{ij}^-(t, z)).$$

Les deux autres équations de Maxwell $\nabla \times E_\perp + \partial_t B_\perp = 0$ et $\nabla \times B_\perp = \mu_0(J_\perp + \varepsilon_0 \partial_t E_\perp)$ peuvent être combinées pour donner l'équation des ondes

$$\partial_t^2 A_\perp - c^2 \partial_z^2 A_\perp = \mu_0 \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} J_{\perp, i},$$

où $J_{\perp, i}$ est défini par

$$\begin{aligned} J_{\perp, i}(t, z) &= \frac{e}{m} (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, z, p_z) \frac{dp_z}{\gamma_i} \\ &= \frac{e}{m} (\mathcal{P}_{c\perp, i} - eA_\perp) \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{ij} \int_{p_{ij}^-(t, z)}^{p_{ij}^+(t, z)} \frac{dp_z}{\gamma_i}. \end{aligned}$$

Dans la suite nous considérons le cas particulier $\mathcal{M} = 1$, qui correspond à une fonction de distribution d'un plasma froid dans la direction perpendiculaire. Puisqu'on ne considère pas de flot moyen transverse on prend $\mathcal{P}_{c\perp, 1} = 0$. De plus on suppose que les effets relativistes sont négligeables, et donc on a $\gamma_i^\pm = 1$ et $\gamma_{ij}^\pm = 1$. En utilisant les relations $\omega_p^2 = e^2 n_0 / (m\varepsilon_0)$ et $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$, le modèle water-bag électromagnétique est décrit par les équations

$$\partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \frac{e}{m} \partial_z \left(\phi + \frac{e}{2m} |A_\perp|^2 \right) = 0, \quad (2.16)$$

$$-\partial_z^2 \phi = \frac{en_0}{\varepsilon_0} (\rho_v - 1), \quad \partial_t^2 A_\perp - c^2 \partial_z^2 A_\perp = -\omega_p^2 A_\perp \rho_v, \quad (2.17)$$

$$\rho_v = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-). \quad (2.18)$$

2.4 Le problème de Cauchy

Dans cette section on présente des résultats d'existence et d'unicité de solutions classiques pour les modèles water-bag-Poisson, water-bag-quasi-neutre et water-bag-électromagnétique décrits plus haut dans le cas d'un nombre fini de bag, d'un ensemble dénombrable et infini de bag et d'un continuum de bag.

2.4.1 Le modèle water-bag-Poisson

2.4.1.1 Cas d'un nombre fini de bag

Dans cette section on considère le problème périodique à valeur initiale

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \phi &= 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ -\partial_z^2 \phi &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec la période $\Omega = 1$ et $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a le résultat d'existence et d'unicité

Théorème 1 (*Solutions classiques locales*). On suppose que $v_{0j}^\pm \in H^m(\Omega)$ avec $m > 3/2$ et $1 \leq j \leq \mathcal{N}$. Alors pour tout \mathcal{N} il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^m(\Omega)}$, \mathcal{N} , Ω et $A = \max_{j \leq \mathcal{N}} |\mathcal{A}_j|$, tel que le système (2.19) admette une solution unique

$$\begin{aligned} v_j^\pm &\in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\Omega)), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ \phi &\in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est basée sur un argument de point fixe. Pour cela on construit une application qui vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Banach (cf [39]). ■

2.4.1.2 Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag

La preuve du théorème 1 est fautive pour un ensemble dénombrable et infini de bag parce que les constantes qui interviennent dans la preuve dépendent du nombre de bag. Cependant le théorème 1 peut être étendu au cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag en remplaçant la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^m}$ par la norme $\|\cdot\|_{L^1 \cap \mathbb{H}^m}$ définie par

$$\begin{aligned} \|\{v_j^\pm(t)\}\|_{L^1 \cap \mathbb{H}^m} &= \sup_{\alpha \in \{+, -\}} \sup_{j \in \mathbb{N}^*} \|v_j^\alpha(t)\|_{H^m(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\mathcal{A}_j| (\|v_j^+(t)\|_{H^m(\Omega)} + \|v_j^-(t)\|_{H^m(\Omega)}), \quad (2.20) \end{aligned}$$

où on suppose que la somme $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\mathcal{A}_j|$ est bornée. Alors on a le résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2 (*Solutions classiques locales*). On suppose que $v_{0j}^\pm \in H^m(\Omega)$ avec $m > 3/2$ et $j \in \mathbb{N}^*$. On fait l'hypothèse que les coefficients $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ sont tels que la somme $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\mathcal{A}_j| = \mathcal{A}$ est bornée. Alors il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^m(\Omega)}$, \mathcal{A} et Ω tel que le système (2.19) admette une solution unique

$$\begin{aligned} v_j^\pm &\in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\Omega)), \quad j \in \mathbb{N}^*, \\ \phi &\in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve. Comme pour la preuve du théorème 1, la preuve du théorème 2 est basée sur le théorème du point-fixe de Banach (cf [39]). ■

2.4.1.3 Cas d'un continuum de bag

Afin de définir un continuum de bag on considère deux feuilletages Lagrangiens comme les familles de courbes $v^\pm = v^\pm(t, z, a)$ indexées par la variable Lagrangienne $a \in [0, 1]$ où le continuum de water-bag $v^\pm(t, z, a)$ sont des fonctions régulières. Le système (2.19) est encore valable si on remplace la mesure de comptage par la mesure de Lebesgue da . En effet considérons la fonction de distribution

$$f(t, z, v) = \int_0^1 (\mathcal{H}(v^+(t, z, a) - v) - \mathcal{H}(v^-(t, z, a) - v)) d\mu(a), \quad (2.21)$$

où

$$\mu(a) = \begin{cases} \mu^\mathcal{N}(a) &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j \delta(a - a_j) \\ \text{or} \\ \mu^\infty(a) &= \mathbb{1}_{[0,1]}(a). \end{cases}$$

De manière évidente on a $\mu^\mathcal{N} \rightharpoonup \mu^\infty$ pour la topologie faible- $*$ $\sigma(\mathcal{M}_b, \mathcal{C}_b)$ (topologie de la convergence étroite) où \mathcal{M}_b est l'ensemble des mesures de Radon bornées. Il est alors facile de vérifier par un calcul direct que f définie par l'équation (2.21) satisfait l'équation de Vlasov (au sens des distributions)

$$\partial_t f + v \partial_z f - \partial_z \phi \partial_v f = 0, \quad -\partial_z^2 \phi = \int_{\mathbb{R}} f dv, \quad (2.22)$$

si et seulement si le continuum de water-bag v^\pm satisfait le modèle water-bag continu donné par

$$\partial_t v^\pm + v^\pm \partial_z v^\pm + \partial_z \phi = 0, \quad -\partial_z^2 \phi = \int_0^1 (v^+ - v^-) da, \quad (2.23)$$

où $\Omega = 1$, $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et $a \in [0, 1]$. On a alors le résultat d'existence et d'unicité

Théorème 3 (*Solutions classiques locales*). *On suppose que $v_0^\pm \in H^m(\mathcal{D})$ avec $m > 2$ et $\mathcal{D} = \Omega \times [0, 1]$. Alors il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_0^\pm\|_{H^m(\mathcal{D})}$ et \mathcal{D} , tel que le système (2.23) admette une solution unique*

$$\begin{aligned} v^\pm &\in L^\infty(0, T; H^m(\mathcal{D})) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\mathcal{D})), \\ \phi &\in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est du même type que celle du théorème 1, excepté que le problème est maintenant à deux dimensions, ce qui implique de prendre des conditions initiales plus régulières à cause des injections continues de Sobolev. ■

Du point de vue physique l'existence de solutions classiques locales en temps met en évidence qu'à partir d'un certain temps, les contours mono-valués se renversent (phénomènes de déferlement d'onde ou de "wave-breaking") et deviennent multi-valués, traduisant ainsi les phénomènes physiques de filamentation de l'espace des phases et du piégeage de particules. Du point de vue numérique, l'intérêt du modèle water-bag étant le petit nombre de contours nécessaire à la description cinétique d'un plasma, si on prend un grand nombre de bag, le modèle de Vlasov est probablement préférable.

2.4.2 Le modèle water-bag-quasi-neutre

Alors que le modèle de Vlasov-Poisson est nécessaire pour traiter les ondes électroniques à haute fréquence, pour des ondes basses fréquences à grande longueur d'onde mettant en jeu les ions, les physiciens ont l'habitude de considérer l'équation de quasi-neutralité à la place de l'équation de Poisson. On va donc s'intéresser au modèle water-bag-quasi-neutre.

2.4.2.1 Cas d'un nombre fini de bag

Dans cette section on considère le problème périodique à valeur initiale

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \phi &= 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ \phi &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - 1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

avec la période $\Omega = 1$ et $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a alors le résultat d'existence et unicité

Théorème 4 (*Solution classiques locales*). *On suppose que $v_{0j}^\pm \in H^m(\Omega)$ avec $m > 3/2$ et \mathcal{A}_j des nombres réels positifs, $1 \leq j \leq \mathcal{N}$. De plus on suppose que la somme $\sum_{j \leq \mathcal{N}} \mathcal{A}_j = A$ est bornée. Alors pour tout \mathcal{N} , il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^m(\Omega)}$, \mathcal{N} , Ω et A , tel que le système (2.24) admette une solution unique*

$$v_j^\pm, \phi \in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0, T; H^m(\Omega)), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}.$$

Preuve. La preuve est basée sur la reformulation du système (2.24) en un système quasi-linéaire hyperbolique de dimension $2\mathcal{N}$, les propriétés d'hyperbolicité du système et des estimations d'énergie [39]. ■

Remarque 1 En fait la fonction de distribution (2.6) peut être la solution d'équations cinétiques plus générales. En effet choisissons la fonction de distribution suivante

$$f(t, z, v) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \mathbb{1}_{v_i(t,z) < v < v_{i+1}(t,z)}(v), \quad (2.25)$$

où la fonction $\mathbb{1}_{a < v < b}(v)$ est égale à l'unité si $v \in]a, b[$ et nulle ailleurs. Si $N = 2\mathcal{N}$ et s'il y a \mathcal{N} bags positifs $\{v_i\}_{i \in \Sigma^+}$ (Σ^+ est l'ensemble des indices des bags positifs) et \mathcal{N} bags négatifs $\{v_i\}_{i \in \Sigma^-}$ (Σ^- est l'ensemble des indices des bags négatifs) alors la fonction de distribution (2.6) est équivalente à (2.25) avec $(-1)^l \mathcal{A}_i = c_{i+1} - c_i$, où $l = 1$ si $i \in \Sigma^+$ et $l = 2$ si $i \in \Sigma^-$. La fonction de distribution (2.25) est alors une solution faible de type water-bag de l'équation cinétique

$$\partial_t f + v \partial_z f - \partial_z q(\rho) \partial_v f = 0, \quad (2.26)$$

où

$$\rho(t, z) = \int_{\mathbb{R}} f(t, z, v) dv,$$

si et seulement si

$$\partial_t v_i + \partial_z \left(\frac{v_i^2}{2} + q(\rho) \right) = 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (2.27)$$

En particulier on retrouve le modèle quasi-neutre si $q(\rho) = \rho$, pour lequel on a

$$q(\rho) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i (v_{i+1} - v_i).$$

L'existence de solutions classiques pour le système (2.27) repose encore sur l'hyperbolicité du système (2.27). Si on suppose qu'au point (t, z) fixé, l'application $v \rightarrow f(t, z, v)$ a un seul changement de monotonie, i.e. qu'il existe n_0 tel que $c_{i+1} > c_i$ pour $i = 0, \dots, n_0 - 1$ et $c_{i+1} < c_i$ pour $i = n_0, \dots, N - 2$, alors le système est hyperbolique. En effet le polynôme caractéristique du Jacobien est défini par

$$R(\lambda) = \begin{vmatrix} v_0 + \frac{\partial q}{\partial v_0} - \lambda & \frac{\partial q}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial q}{\partial v_{N-1}} & \frac{\partial q}{\partial v_N} \\ \frac{\partial q}{\partial v_0} & v_1 + \frac{\partial q}{\partial v_1} - \lambda & \dots & \frac{\partial q}{\partial v_{N-1}} & \frac{\partial q}{\partial v_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q}{\partial v_0} & \frac{\partial q}{\partial v_1} & \dots & v_{N-1} + \frac{\partial q}{\partial v_{N-1}} - \lambda & \frac{\partial q}{\partial v_N} \\ \frac{\partial q}{\partial v_0} & \frac{\partial q}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial q}{\partial v_{N-1}} & v_N + \frac{\partial q}{\partial v_N} - \lambda \end{vmatrix}$$

et on a

$$R(v_i) = \frac{\partial q}{\partial v_i} \prod_{j=0, j \neq i}^N (v_j - v_i).$$

Si maintenant on suppose que $p' > 0$, puisque $p'(\rho) = \rho q'(\rho)$, alors $\frac{\partial q}{\partial v_i}$ a le même signe que $\frac{\partial p}{\partial v_i} = c_{i-1} - c_i$ et donc le signe de $R(v_i)$ est celui de $(-1)^{i-1} \text{sign}(c_{i-1} - c_i)$. En outre le terme dominant de $R(\lambda)$ est $(-1)^{N+1} \lambda^{N+1}$. Par suite si $v_0 < v_1 < \dots < v_N$, alors le polynôme R a $N + 1$ racines réelles. Par suite le système (2.27) est hyperbolique, et donc symétrisable, et finalement il admet une solution unique classique locale v_i , $i = 1, \dots, N$, telle que

$$v_i \in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \mathcal{C}(0, T; H^m(\Omega)), \quad i = 1, \dots, N.$$

Notons que la solution faible water-bag (2.25) de l'équation

$$\partial_t f + v \partial_z f + \partial_z q(\rho) \cdot \partial_v f = 0,$$

conduit au système

$$\partial_t v_i + \partial_z \left(\frac{v_i^2}{2} - q(\rho) \right) = 0, \quad i = 0, \dots, N,$$

qui peut ne pas être hyperbolique. En effet, pour $q(\rho) = \rho$ et $N = 2$, the système n'est pas hyperbolique puisque des racines imaginaires sont possibles.

L'existence d'une large classe de solutions pour l'équation (2.26) avec des fonctions générales q ou même avec $q(\rho) = \rho$, lorsque le nombre de bag tend vers l'infini, est encore un problème ouvert parce que les techniques traditionnelles comme les lemmes de moyennes ou les outils de compacité par compensation échouent. Les solutions faibles water-bag semblent être une piste intéressante pour atteindre cet objectif pour peu qu'on puisse passer à la limite par rapport au nombre de bag dans (2.27).

2.4.2.2 Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag

Comme il a été mentionné dans la remarque précédente la preuve d'existence de solutions water-bag pour le système water-bag-quasi-neutre lorsque le nombre de bag est infini n'est pas une tâche facile parce qu'on est amené à traiter un système hyperbolique de dimension infini. On sait depuis le théorème 4 que le temps existence dépend du nombre de bag. Malheureusement l'estimation du temps d'existence par rapport au nombre de bag \mathcal{N} conduit à un résultat négatif. Plus précisément nous avons le théorème suivant qui montre que le temps d'existence décroît avec le nombre de bag avec une vitesse polynomiale d'un demi.

Théorème 5 *Supposons que $q(\rho) = \rho$ et $0 < c_0 < c_1 < \dots < c_N$. En outre faisons l'hypothèse qu'il existe une constante K telle que $0 < M_N/m_N < K$ où*

$$M_N = \max \left(c_0^N, \max_{i=1, \dots, N} (c_i^N - c_{i-1}^N) \right), \quad m_N = \min \left(c_0^N, \min_{i=1, \dots, N} (c_i^N - c_{i-1}^N) \right).$$

Alors il existe une constante \mathcal{K} qui dépend de K et $\|v_{0i}\|_{H^2(\Omega)}$ telle que le temps maximum d'existence T_N des solutions du système (2.27) satisfait l'estimation

$$T_N \leq \frac{\mathcal{K}}{\sqrt{1+N}}.$$

Preuve. La preuve est basée sur des estimations d'énergie pour les systèmes de lois de conservation hyperboliques [39]. ■

2.4.2.3 Cas d'un continuum de bag

Dans le cas d'un continuum de bag, les concepts de diagonalisation et d'hyperbolicité développés pour le système intégro-différentiel des ondes en eau peu profonde (dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes) [210] permettent de trouver des conditions supplémentaires qui assurent le caractère hyperbolique du système de lois de conservation obtenu et permet ainsi d'obtenir l'existence de solutions classiques locales en temps.

Soit z la variable périodique d'espace de période 1 et $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Afin de définir un continuum de bag on considère deux feuilletages Lagrangiens comme les familles de courbes $v^\pm = v^\pm(t, z, a)$ indexées par la variable Lagrangienne $a \in [0, 1]$ où le continuum de water-bag $v^\pm(t, z, a)$ sont des fonctions régulières telles que $v^- \leq v^+$, $\partial_a v^+ < 0$, $\partial_a v^- > 0$ et $\partial_x^\alpha v^+(a=1) = \partial_x^\alpha v^-(a=1)$, $\forall \alpha \leq 1$. Les équations (2.7) et (2.12) sont encore valables lorsqu'on remplace la mesure de comptage par la mesure de Lebesgue da . Comme dans la section 2.4.1.3, il est facile de vérifier par un calcul direct que la fonction f définie par l'équation (2.21) satisfait, l'équation de Vlasov (au sens des distributions)

$$\partial_t f + v \partial_z f - \partial_z \phi \partial_v f = 0, \quad \phi = \int_{\mathbb{R}} f dv, \quad (2.28)$$

si et seulement si le continuum de water-bag v^\pm satisfait le système water-bag continu donné par

$$\partial_t v^\pm + v^\pm \partial_x v^\pm + \partial_x \phi = 0 \quad (2.29)$$

$$\phi = \int_0^1 (v^+ - v^-) da. \quad (2.30)$$

Si on pose $c = v^+ - v^- = \partial_a Z(t, x, a)$ ($\partial_a Z > 0$) où

$$Z(t, x, a) = \int_0^a (v^+ - v^-) db \quad (2.31)$$

et si on pose $u = (v^+ + v^-)/2$, alors le système (2.29)-(2.30) est équivalent au système

$$\partial_t c + \partial_x (cu) = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + \frac{c}{4} \partial_x c + \partial_x \left(\int_0^1 c da \right) = 0. \quad (2.33)$$

Notons que l'existence de solutions entropiques pour le système (2.32)-(2.33) avec un seul bag (i.e. $c = \tilde{c}(t, x) \delta(a)$ et $u = \tilde{u}(t, x) \delta(a)$) a été prouvée dans [59, 60, 61].

Notons aussi que dans [52], l'auteur a démontré l'existence de solutions classiques pour les équations hydrostatiques homogènes suivantes

$$\partial_t c + \partial_x (cu) = 0 \quad (2.34)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + \partial_x p = 0 \quad (2.35)$$

avec p la pression, sous la contrainte

$$\int_0^1 c(t, x, a) da = 1. \quad (2.36)$$

La principale différence entre le système (2.34)-(2.36) et le système (2.32)-(2.33) est que, dans le premier la frontière est fixée par la contrainte (2.36) alors que le second est un problème à frontière libre.

Il est intéressant de noter les similarités entre le modèle water-bag et le système de Benney qui décrit la dynamique des ondes en eau peu profonde (dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes) dont la structure Hamiltonienne a largement été étudiée [12, 219, 220, 156, 157, 160, 118, 114]. Comme le modèle water-bag, les équations de Benney peuvent être réduites à un système de dimension infini de lois de conservation du premier ordre (hyperbolique), possédant un nombre infini d'intégrales du mouvement. Chaque modèle peut être dérivé à partir d'une classe particulière de solution faible de l'équation de Vlasov, via la "fermeture" d'Heaviside pour les équations water-bag et la "fermeture" de Dirac pour les équations de Benney.

Soit Γ^+ (resp. Γ^-) la courbe correspondant à l'intervall $[v_b^-, v_c]$ (resp. $[v_c, v_b^+]$) orientée comme dans la figure 2.3 où $v_b^- = v^-(t, z, 0)$ (resp. $v_b^+ = v^+(t, z, 0)$), $v_c = v^-(t, z, 1) = v^+(t, z, 1)$ et $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+$. On note v tel que $v|_{\Gamma^\pm} = v^\pm$, ω tel que $\omega|_{\Gamma^\pm} = \omega^\pm = \partial_a v^\pm$, et γ tel que $\gamma|_{\Gamma^\pm} = \gamma^\pm = 1/\omega^\pm$. Finalement on définit la norme \mathring{H}_{za}^3 comme il suit. Pour toute fonction $\varphi(z, a) \in \mathring{H}_{za}^3$ on a

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\mathring{H}_{za}^3}^2 &= \|\varphi\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_z\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_a\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_{za}\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_{zz}\|_{L_{za}^2}^2 \\ &\quad + \|\varphi_{aa}\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_{zzz}\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_{zza}\|_{L_{za}^2}^2 + \|\varphi_{zaa}\|_{L_{za}^2}^2 \end{aligned}$$

Indice d'une fonction

2.4. Le problème de Cauchy

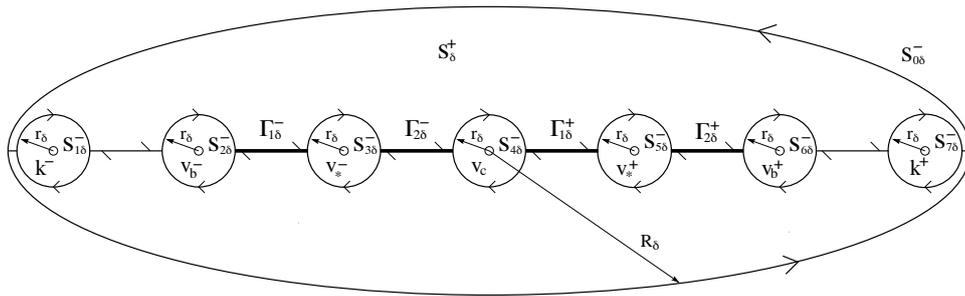


FIGURE 2.3 – Le plan complexe

On note par $\mathcal{C}(\Gamma)$ l'algèbre de Banach de l'ensemble des fonctions à valeur complexe qui sont continues sur Γ . Soit $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ et on suppose que $f(\zeta)$ ne s'annule jamais sur Γ . Si Γ est une courbe fermée simple, alors $[\arg f]_\Gamma$ désigne la variation de l'argument de la fonction $f(\zeta)$ le long de la courbe Γ . L'indice de la fonction f (autour du point $\zeta = 0$) est donné par $\text{Ind } f = \frac{1}{2\pi} [\arg f]_\Gamma$. Soit maintenant Γ une courbe fermée simple (cette définition s'étend aux cas d'une courbe composée et d'une courbe non simple fermée ou non fermée). Afin de définir l'indice d'une fonction $f \in \mathbb{P}\mathcal{C}(\Gamma)$ (l'ensemble des fonctions à valeur complexe qui sont continues par morceaux sur Γ) on doit prolonger par continuité la fonction f de telle sorte que la courbe du plan complexe résultant de l'image de la fonction f lorsque ζ parcourt Γ soit une courbe continue fermée. Pour plus de détails sur cette construction ainsi que des propriétés supplémentaires sur l'indice d'une fonction d'une variable complexe, on pourra consulter [109, 123, 124, 170, 177].

On a alors le résultat d'existence et d'unicité

Théorème 6 *On suppose que l'on a $r^\pm(t=0) \in H_z^1$, $k^\pm(t=0) \in W_z^{1,\infty}$, $\mathcal{R}^\pm(t=0) \in \dot{H}_{za}^3$, $\omega^\pm(t=0) \in H_{za}^3$, $\gamma^\pm(t=0) \in H_{za}^3$, et $v^\pm(t=0) \in H_{za}^3$. En outre on suppose que $v^- \leq v^+$, $\partial_a v^+ < 0$, $\partial_a v^- > 0$ et $\partial_z^\alpha v^+(a=1) = \partial_z^\alpha v^-(a=1)$, $\forall \alpha \leq 1$. Par ailleurs on suppose que les conditions*

$$\inf_{\zeta \in \Gamma} \text{ess}|\chi^\pm(\zeta)| > 0, \quad \text{Ind}(\mathcal{G}) = 2,$$

sont satisfaites, avec $\mathcal{G} = \chi^+/\chi^-$ et où χ^\pm sont définies par

$$\chi^\pm(\zeta) = 1 - \text{v.p.} \int_\Gamma \frac{1}{\omega} \frac{dv}{v - \zeta} \mp \frac{i\pi}{\omega}, \quad \forall \zeta \in \Gamma.$$

Alors le système intégro-différentiel (2.29)-(2.30) ou (2.32)-(2.33) est équivalent au système quasi-linéaire

$$\partial_t \mathcal{R}^\pm + v^\pm \partial_z \mathcal{R}^\pm = 0, \quad (2.37)$$

$$\partial_t r^\pm + k^\pm \partial_z r^\pm = 0, \quad (2.38)$$

où r^\pm et \mathcal{R}^\pm désignent les invariants de Riemann définis par

$$\begin{aligned} r^\pm(t, z) &= k^\pm(t, z) + \int_0^1 \ln \left| \frac{v^-(t, z, \nu) - k^\pm(t, z)}{v^+(t, z, \nu) - k^\pm(t, z)} \right| d\nu \\ \mathcal{R}^\pm(t, z, a) &= v^\pm(t, z, a) + \int_0^1 \ln \left| \frac{v^-(t, z, \nu) - v^\pm(t, z, a)}{v^+(t, z, \nu) - v^\pm(t, z, a)} \right| d\nu. \end{aligned}$$

De plus les systèmes (2.29)-(2.30), (2.32)-(2.33) et (2.37)-(2.38) sont hyperboliques avec les

valeurs propres réelles $\{v^\pm, k^\pm\}$ satisfaisant pour tout $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \chi(k^\pm(t, z)) &= 0, & |\chi'(k^\pm(t, z))| &> 0, \\ -\infty < k^-(t, z) &< \inf_{a \in [0, 1]} v^-(t, z, a), \\ +\infty > k^+(t, z) &> \sup_{a \in [0, 1]} v^+(t, z, a), \end{aligned}$$

où la fonction $\chi(\zeta)$ est donnée par

$$\chi(\zeta) = 1 - \int_0^1 \frac{cda}{(v^+ - \zeta)(v^- - \zeta)}.$$

Les invariants de Riemann r^\pm et \mathcal{R}^\pm sont respectivement constants le long des courbes caractéristiques $z^\pm(t)$ et $z^{a, \pm}(t)$ définies par

$$\frac{d}{dt} z^\pm(t) = k^\pm(t, z^\pm(t)) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} z^{a, \pm}(t) = v^\pm(t, z^{a, \pm}(t), a).$$

Finalement il existe un temps $T > 0$ tel que les systèmes (2.37)-(2.38), (2.29)-(2.30), (2.32)-(2.33), et les équations

$$\partial_t \omega^\pm + v^\pm \partial_x \omega^\pm + \omega^\pm \partial_x v^\pm = 0, \quad (2.39)$$

$$\partial_t \gamma^\pm + v^\pm \partial_x \gamma^\pm - \gamma^\pm \partial_x v^\pm = 0, \quad (2.40)$$

ont une solution unique

$$\begin{aligned} r^\pm &\in L^\infty([0, T]; H_z^1) \cap \text{Lip}([0, T]; L_z^2) \\ \mathcal{R}^\pm &\in L^\infty([0, T]; \dot{H}_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_{za}^2) \\ k^\pm &\in L^\infty([0, T]; W_z^{1, \infty}) \cap \text{Lip}([0, T]; L_z^\infty) \\ \\ v^\pm &\in L^\infty([0, T]; H_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_{za}^2) \\ \phi &\in L^\infty([0, T]; H_z^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_z^2) \\ \\ c &\in L^\infty([0, T]; H_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H^2) \\ u &\in L^\infty([0, T]; H_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_{za}^2) \\ \phi &\in L^\infty([0, T]; H_z^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_z^2) \\ \\ \omega^\pm &\in L^\infty([0, T]; H_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_{za}^2) \\ \gamma^\pm &\in L^\infty([0, T]; H_{za}^3) \cap \text{Lip}([0, T]; H_{za}^2) \end{aligned}$$

Preuve. La démonstration de ce théorème se trouve dans [43]. La preuve du théorème est basée sur les concepts de diagonalisation et d'hyperbolicité développés pour le système intégral-différentiel des ondes en eau peu profonde (dans l'approximation des grandes longueurs d'ondes) dans [210]. Dans ce cadre, on peut établir des contraintes qui assurent l'hyperbolicité du continuum de water-bag et calculer explicitement les valeurs et les vecteurs propres généralisés. Afin de montrer l'existence et l'unicité du continuum de water-bag, i.e. les solutions classiques des systèmes (2.29)-(2.30) ou (2.32)-(2.33), on utilise le système quasi-linéaire équivalent (2.37)-(2.38) écrit en terme d'invariants de Riemann ainsi que le système supplémentaire (2.39)-(2.40) obtenu en dérivant le système (2.29)-(2.30) par rapport à a . L'idée consiste à obtenir des estimations d'énergie a priori pour les invariants de Riemann \mathcal{R}^\pm , r^\pm et les quantités ω^\pm et γ^\pm . Pour cela on utilise les propriétés du problème aux valeurs propres généralisées, la résolution du problème de Riemann-Hilbert [109, 177, 185, 123, 124], des résultats classiques de la théorie des opérateurs intégraux singuliers et de l'analyse harmonique [46, 56, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 109, 123, 124, 150, 168, 169, 170, 174, 175, 176, 177, 185, 206]. ■

2.4.3 Le modèle water-bag-électromagnétique

L'interaction laser-plasma implique bien entendu de considérer le modèle électromagnétique complet, c'est-à-dire le modèle water-bag-électromagnétique.

2.4.3.1 Cas d'un nombre fini de bag

Dans cette section on considère le problème périodique à valeur initiale

$$\partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \left(\phi + \frac{1}{2} |A_\perp|^2 \right) = 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (2.41)$$

$$-\partial_z^2 \phi = \rho_v - 1, \quad \partial_t^2 A_\perp - \partial_z^2 A_\perp = -A_\perp \rho_v, \quad \rho_v = \sum_j^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-), \quad (2.42)$$

avec la période $\Omega = 1$ et $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On a alors le résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 7 (*Solutions classiques locales*). *On suppose que $v_{0j}^\pm \in H^m(\Omega)$ avec $m > 3/2$ et $1 \leq j \leq \mathcal{N}$. En outre on fait l'hypothèse que $A_\perp^0 = A_\perp(0, x) \in H^m(\Omega)$ et $A_\perp^1 = (\partial_t A_\perp)(0, x) \in H^{m-1}(\Omega)$. Alors pour tout \mathcal{N} , il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^m(\Omega)}$, $\|A_\perp^0\|_{H^m(\Omega)}$, $\|A_\perp^1\|_{H^{m-1}(\Omega)}$, \mathcal{N} , Ω et $A = \max_{j \leq \mathcal{N}} |\mathcal{A}_j|$ tel que le système (2.41)-(2.42) admette une solution unique*

$$v_j^\pm, A_\perp \in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\Omega)), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ \phi \in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)).$$

Preuve. La preuve est basée sur un argument de point fixe. Pour cela on construit une application qui vérifie les hypothèses du théorème du point fixe de Banach (cf [39]). ■

2.4.3.2 Cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag

La preuve du théorème 7 est fautive pour le cas d'un ensemble dénombrable et infini de bag parce que les constantes qui interviennent dans la preuve dépendent du nombre de bag. Cependant le théorème 7 peut être étendu au cas d'un nombre dénombrable et infini de bag en remplaçant la norme $\|\cdot\|_{H^m}$ par la norme $\|\cdot\|_{L^1 \cap H^m}$ donnée par la définition (2.20). On a alors le résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 8 (*Solution classiques locales*). *On suppose que $v_{0j}^\pm \in H^m(\Omega)$ avec $m > 3/2$ et $j \in \mathbb{N}^*$. En outre on suppose que les coefficients $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ sont tels que la somme $\sum_{j \in \mathbb{N}^*} |\mathcal{A}_j| = \mathcal{A}$ est bornée. De plus on fait l'hypothèse que $A_\perp^0 = A_\perp(0, x) \in H^m(\Omega)$ et $A_\perp^1 = (\partial_t A_\perp)(0, x) \in H^{m-1}(\Omega)$. Alors il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^m(\Omega)}$, $\|A_\perp^0\|_{H^m(\Omega)}$, $\|A_\perp^1\|_{H^{m-1}(\Omega)}$, \mathcal{A} et Ω tel que le système (2.41)-(2.42) admette une solution unique*

$$v_j^\pm, A_\perp \in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\Omega)), \quad j \in \mathbb{N}^*, \\ \phi \in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)).$$

Preuve. La preuve repose sur les mêmes arguments (construction d'une application qui vérifie les hypothèses du théorème de Banach) que la preuve du théorème 7. ■

2.4.3.3 Cas d'un continuum de bag

Afin de définir un continuum de bag, comme dans la section 2.4.1.3, on considère deux feuilletages Lagrangiens comme les familles de courbes $v^\pm = v^\pm(t, z, a)$ indexées par la variable Lagrangienne $a \in [0, 1]$ où le continuum de water-bag $v^\pm(t, z, a)$ sont des fonctions régulières. Le système (2.41)-(2.42) est encore valable si on remplace la mesure de comptage par la mesure de

Lebesgue da , ce qui implique que le continuum de water-bag v^\pm satisfasse le modèle water-bag continu donné par

$$\partial_t v^\pm + v^\pm \partial_z v^\pm + \partial_z \left(\phi + \frac{1}{2} |A_\perp|^2 \right) = 0, \quad v^\pm(t=0) = v_0^\pm, \quad (2.43)$$

$$-\partial_z^2 \phi = \rho_v - 1, \quad \partial_t^2 A_\perp - \partial_z^2 A_\perp = -A_\perp \rho_v, \quad \rho_v = \int_0^1 (v^+ - v^-) da. \quad (2.44)$$

avec la période $\Omega = 1$, $z \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $a \in [0, 1]$. On a alors le résultat d'existence et d'unicité.

Théorème 9 (*Solutions classiques locales*). *Supposons que $v_0^\pm \in H^m(\mathcal{D})$ avec $m > 2$ et $\mathcal{D} = \Omega \times [0, 1]$. En outre on suppose que $A_\perp^0 = A_\perp(t=0) \in H^m(\mathcal{D})$ et $A_\perp^1 = (\partial_t A_\perp)(t=0) \in H^{m-1}(\mathcal{D})$. Alors il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_0^\pm\|_{H^m(\mathcal{D})}$, $\|A_\perp^0\|_{H^m(\Omega)}$, $\|A_\perp^1\|_{H^{m-1}(\Omega)}$, et \mathcal{D} tel que le système (2.43)-(2.44) admette une solution unique*

$$\begin{aligned} v^\pm &\in L^\infty(0, T; H^m(\mathcal{D})) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\mathcal{D})), \\ \phi &\in L^\infty(0, T; H^{m+2}(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m+1}(\Omega)), \\ A_\perp &\in L^\infty(0, T; H^m(\Omega)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{m-1}(\Omega)). \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est du même type que celle du théorème 7, excepté que le problème est maintenant à deux dimensions, ce qui implique de prendre des conditions initiales plus régulières à cause des injections continues de Sobolev. ■

2.5 Approximation numérique

L'existence de solutions pour le modèle water-bag étant étudiée, il importe pour le physicien d'avoir des schémas numériques performants pour la simulation numérique des plasmas. Dans ce paragraphe nous proposons des schémas numériques pour le modèle water-bag avec les différents couplages non linéaires auto-cohérents considérés précédemment. Dans cette section on suppose un plasma périodique de période L , $z \in \Omega =]0, L[$. Après normalisation des équations (2.7), (2.10), (2.12) et (2.16)-(2.18) les équations water-bag deviennent

$$\partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \left(\phi + \frac{1}{2} |A_\perp|^2 \right) = 0, \quad (2.45)$$

avec l'équation de Poisson pour les ondes de Langmuir

$$-\partial_z^2 \phi = \sum_{j \leq \mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - n_0, \quad (2.46)$$

la quasi-neutralité pour les ondes acoustiques ioniques

$$\phi = \frac{Z_i}{n_0 \tau} \left(Z_i \sum_{j \leq \mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - n_0 \right), \quad (2.47)$$

l'équation des ondes pour l'interaction laser-plasma électromagnétique

$$\partial_t^2 A_\perp - \partial_z^2 A_\perp = -A_\perp \sum_{j \leq \mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-), \quad (2.48)$$

où Z_i désigne le nombre de charge et $\tau = T_i/T_e$. De plus on ajoute les conditions initiales $v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot)$.

2.5.1 Schémas numériques

Dans cette section on présente brièvement la méthode numérique pour résoudre les équations (2.45)-(2.46) avec $A_\perp = 0$, (2.45) et (2.47) avec $A_\perp = 0$ et le système formé par les équations (2.45)-(2.46) et (2.48). La méthode de Galerkin-discontinu (GD) [68, 96] a été utilisée pour discrétiser ces équations. C'est une méthode d'éléments finis locale qui utilise une approximation spatiale discontinue et qui incorpore les idées des flux numériques et des limiteurs de pentes utilisés dans les schémas de différences finies et volumes finis d'ordre élevé. La méthode GD combinée avec une discrétisation en temps de type Runge-Kutta ou Lax-Wendroff conduit à des schémas stables, d'ordre élevé, facilement parallélisables et bien adaptés au raffinement adaptatif $h-p$ dans le cas de géométries complexes avec conditions aux limites.

2.5.1.1 Discrétisation des équations water-bag

Soit Ω le domaine de calcul et \mathcal{M}_h une partition de Ω d'éléments K telle que $\cup_{K \in \mathcal{M}_h} \overline{K} = \overline{\Omega}$, $K \cap Q = \emptyset$, $K, Q \in \mathcal{M}_h$, $K \neq Q$. On pose $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} h_K$ où h_K est le diamètre extérieur de l'élément fini K . La première étape de la méthode consiste à écrire les équations (2.45) sous forme variationnelle (ou faible) sur un élément K de la partition \mathcal{M}_h en utilisant une formule Green. On cherche alors une solution approchée $(v_{h,j}^\pm, \phi_h, A_{\perp h})$ dont la restriction à un élément K appartient à l'espace local de dimension fini $\mathcal{P}(K)$, typiquement un espace de polynôme. On pose alors

$$\mathcal{P}_h(\Omega) = \{ \psi \mid \psi|_K \in \mathcal{P}(K), \forall K \in \mathcal{M}_h \}.$$

On détermine la solution approchée $(v_{h,j}^\pm, \phi_h, A_{\perp h})|_K \in \mathcal{P}(K)^{\otimes 5}$ pour $t > 0$, sur chaque élément K de \mathcal{M}_h en imposant pour tout $\varphi_h \in \mathcal{P}(K)$, et pour tout $j = 1, \dots, \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \int_K \partial_t v_{h,j}^\pm \varphi_h dz - \int_K \left(f(v_{h,j}^\pm) + \phi_h(z) + \frac{1}{2} |A_{h,\perp}(z)|^2 \right) \partial_z \varphi_h dz \\ + \int_{\partial K} \left(\widehat{f n_K}(v_{h,j}^\pm) + \widehat{\phi_h n_K} + \frac{1}{2} \widehat{|A_{h,\perp}|^2 n_K} \right) \varphi_h d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où ∂K désigne le bord de K , n_K la normale unitaire extérieure à ∂K , et $f(\cdot) = (\cdot)^2/2$. Les flux numériques $\widehat{f n_K}(v_{h,j}^\pm)$, $\widehat{\phi_h n_K}$, et $\frac{1}{2} \widehat{|A_{h,\perp}|^2 n_K}$ doivent être judicieusement choisis (flux upwind, flux centré, flux gauche, flux droit, flux de Godunov, flux de Engquist-Osher, flux de Lax-Friedrichs, ...) et respecter certaines contraintes (consistance et monotonie) [68, 96]. Alors pour chaque élément K , après l'étape de discrétisation spatiale, on obtient les équations différentielles ordinaires

$$\mathfrak{M} \frac{d}{dt} v_{h,j|_K}^\pm = \mathcal{L}_K \left(\left\{ v_{h,j|_{K'}}^\pm, \phi_{h|_{K'}}, A_{h,\perp|_{K'}} \mid \overline{K'} \cap \overline{K} \in \partial K \right\} \right),$$

$\forall K \in \mathcal{M}_h$ et $j = 1, \dots, \mathcal{N}$. En général la matrice de masse \mathfrak{M} , de faible dimension (égale à celle de l'espace local $\mathcal{P}(K)$), est facilement inversible. Si on choisit des polynômes orthogonaux la matrice \mathfrak{M} est diagonale. Ici on choisit des polynômes de Legendre qui forment une base orthogonale de l'espace L^2 . On est alors amené à résoudre les équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} v_{h,j}^\pm = \mathcal{L}_h(v_{h,j}^\pm, \phi_h, A_{h,\perp}), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (2.50)$$

Afin de résoudre (2.50) on utilise une méthode de Runge-Kutta d'ordre trois [127]. Pour discrétiser la condition initiale on prend la projection L^2 de v_{0j}^\pm sur $\mathcal{P}(K)$, i.e. pour toute fonction $\varphi_h \in \mathcal{P}(K)$

$$\int_K v_{h,j}^\pm \varphi_h dz = \int_K v_{0j}^\pm \varphi_h dz, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$$

2.5.1.2 Discrétisation de l'équation de quasi-neutralité

Pour résoudre l'équation de quasi-neutralité (2.47) on prend sa projection L^2 sur $\mathcal{P}(K)$, i.e. pour toute fonction $\varphi_h \in \mathcal{P}(K)$

$$\int_K \phi_h \varphi_h dz = \int_K \varphi_h \frac{Z_i}{n_0 \tau} \left(Z_i \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_{h,j}^+ - v_{h,j}^-) - n_0 \right) dz, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h.$$

2.5.1.3 Discrétisation de l'équation de Poisson

On résoud l'équation de Poisson (2.46) dans le cadre de la méthode de Galerkin-discontinu locale afin d'obtenir un schéma global stable et consistant. En utilisant une formule de Green on réécrit l'équation (2.46) sous sa forme variationnelle (faible) discrétisée : trouver $E_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ et $\phi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ tel que pour toute fonction $\varphi_h, \psi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$, et pour tout $K \in \mathcal{M}_h$

$$\int_K E_h \varphi_h dz = \int_K \phi_h \partial_z \varphi_h dz - \int_{\partial K} \widehat{\phi}_h \varphi_h n_{K^-} d\Gamma, \quad (2.51)$$

$$\int_K E_h \partial_z \psi_h dz = \int_{\partial K} \widehat{E}_h n_{K^-} \psi_h d\Gamma - \int_K \rho_h \psi_h dz, \quad (2.52)$$

où E_h est une approximation de $E = -\partial_z \phi$, et ρ_h représente une approximation du terme source de (2.46). Si n est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, alors \mathcal{E}_h° désigne l'ensemble des bords intérieurs de \mathcal{M}_h et \mathcal{E}_h^∂ représente l'ensemble des bords appartenant à la frontière \mathcal{M}_h . Si on utilise les notations $[\varphi_h] = \varphi_h^+ n_{K^-} - \varphi_h^- n_{K^+}$, $\{\varphi_h\} = \frac{1}{2}(\varphi_h^+ + \varphi_h^-)$, on a alors

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial K} \psi_{K^-} \varphi_{K^-} n_{K^-} d\Gamma = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} ([\psi]\{\varphi\} + [\varphi]\{\psi\}) d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} \psi \varphi n d\Gamma. \quad (2.53)$$

Si on prend $\varphi_h = E_h$ dans (2.51), $\psi_h = \phi_h$ dans (2.52), en sommant sur tous les éléments K et en utilisant (2.53) on obtient

$$\mathcal{R}_h + \int_{\Omega} |E_h|^2 dz = \int_{\Omega} \rho_h \phi_h dz, \quad (2.54)$$

où

$$\mathcal{R}_h = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} (\widehat{E}_h - E_h)[\phi_h] + \{\widehat{\phi}_h - \phi_h\}[E_h] d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} (\phi_h(\widehat{E}_h - E_h) + \widehat{\phi}_h E_h) n d\Gamma. \quad (2.55)$$

On choisit les flux numériques comme il suit [68]

$$\begin{aligned} \widehat{E}_h &= \{E_h\} + \alpha_{11}[\phi_h] + \alpha_{12}[E_h], & \widehat{\phi}_h &= \{\phi_h\} - \alpha_{11}[\phi_h] + \alpha_{22}[E_h] \quad \text{sur } \mathcal{E}_h^\circ \\ \widehat{E}_h &= E_h + \alpha_{11}\phi_h n, & \widehat{\phi}_h &= 0, \quad \text{sur } \mathcal{E}_h^\partial, \end{aligned} \quad (2.56)$$

où $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} \geq 0$ et α_{12} sont des réels. En injectant (2.56) dans (2.55) on obtient

$$\mathcal{R}_h = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} (\alpha_{11}[\phi_h]^2 + \alpha_{22}[E_h]^2) d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} \alpha_{11}|\phi_h|^2 d\Gamma \geq 0. \quad (2.57)$$

Si on pose $\rho_h = 0$ alors on a $[\phi_h] = 0$, $\phi_h|_{\mathcal{E}_h^\partial} = 0$ et $E_h = 0$. Les équations (2.51) peuvent se réécrire comme

$$\int_K \psi \partial_z \phi_h dz = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{P}(K), \quad \forall K \in \mathcal{M}_h,$$

ce qui implique que $\phi_h = 0$ sur $\overline{\Omega}$ si bien que la solution approchée ϕ_h est bien définie.

Calculons maintenant cette unique solution. En prenant l'équation (2.51), en sommant sur les éléments K et en utilisant (2.53) on obtient

$$a(E_h, \varphi_h) - b(\phi_h, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega), \quad (2.58)$$

où les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont définies par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dz + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} \alpha_{22}[u][v] \, d\Gamma, \quad b(w, u) = \int_{\Omega} \partial_z uw \, dz + \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} [u](\alpha_{12}[w] - \{w\}) \, d\Gamma.$$

En utilisant une intégration par parties on obtient

$$- \int_K E_h \partial_z \varphi_h \, dz = - \int_{\partial K} E_h n_{K^-} \varphi_h \, d\Gamma + \int_K \partial_z E_h \varphi_h \, dz. \quad (2.59)$$

Si on ajoute (2.52) à (2.59), après sommation sur K , la relation (2.53) conduit à

$$b(\psi_h, E_h) + c(\psi_h, \phi_h) = F(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega), \quad (2.60)$$

où la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $F(\cdot)$ sont données par

$$c(w, p) = \alpha_{11} \int_{\mathcal{E}_h^{\circ}} [w][p] \, d\Gamma + \alpha_{11} \int_{\mathcal{E}_h^{\rho}} pw \, d\Gamma, \quad F(w) = \int_{\Omega} w \rho_h \, dz.$$

Le système formé par les équations (2.58) et (2.60) conduit à un système matriciel que l'on peut résoudre par des méthodes directes ou itératives standard de l'algèbre linéaire.

2.5.1.4 Discrétisation de l'équation des ondes

Il reste à discrétiser l'équation des ondes (2.48). Pour ce faire on réécrit l'équation (2.48) en introduisant les propagateurs $E^{\pm} = E_{\perp 1} \pm B_{\perp 2}$ et $F^{\pm} = E_{\perp 2} \pm B_{\perp 1}$, ce qui donne

$$\partial_t E^{\pm} \pm \partial_x E^{\pm} = -J_{\perp 1}, \quad \partial_t F^{\pm} \mp \partial_x F^{\pm} = -J_{\perp 2}, \quad (2.61)$$

où pour $i = 1, 2$,

$$J_{\perp i} = -A_{\perp i} \sum_{j \leq \mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-),$$

et

$$\partial_t A_{\perp 1} = -E_{\perp 1} = -\frac{1}{2}(E^+ + E^-), \quad \partial_t A_{\perp 2} = -E_{\perp 2} = -\frac{1}{2}(F^+ + F^-).$$

Commençons par les équations (2.61). Après avoir écrit les équations (2.61) sous leurs formes variationnelles sur chaque élément K de \mathcal{M}_h en utilisant une formule Green, on détermine la solution approchée $(E_h^{\pm}, F_h^{\pm})|_K \in \mathcal{P}(K)^{\otimes 4}$ pour $t > 0$, sur chaque élément K de \mathcal{M}_h en imposant pour toute fonction $\varphi_h \in \mathcal{P}(K)$,

$$\int_K \partial_t E_h^{\pm} \varphi_h \, dz \mp \int_K E_h^{\pm} \partial_z \varphi_h \, dz \pm \int_{\partial K} \widehat{E_h^{\pm} n_K} \varphi_h \, d\Gamma = - \int_K J_{h, \perp 1} \varphi_h \, dz, \quad (2.62)$$

$$\int_K \partial_t F_h^{\pm} \varphi_h \, dz \pm \int_K F_h^{\pm} \partial_z \varphi_h \, dz \mp \int_{\partial K} \widehat{F_h^{\pm} n_K} \varphi_h \, d\Gamma = - \int_K J_{h, \perp 2} \varphi_h \, dz, \quad (2.63)$$

où des flux upwind sont choisis pour les flux numériques $\widehat{E_h^{\pm} n_K^-}$ et $\widehat{F_h^{\pm} n_K^-}$. La projection L^2 de l'équation $\partial_t A_{\perp} = -E_{\perp}$ sur l'espace de dimension fini $\mathcal{P}(K)$ donne

$$\int_K \partial_t A_{h, \perp} \varphi_h \, dz = - \int_K E_{h, \perp} \varphi_h \, dz. \quad (2.64)$$

Les équations (2.62)-(2.64) conduisent aux équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_h = \mathcal{J}_h \left(\mathcal{F}_h, \{v_{h, j}^{\pm}\}_{j=1, \dots, \mathcal{N}} \right), \quad (2.65)$$

où la notation compacte $\mathcal{F}_h = (E_h^{\pm}, F_h^{\pm}, A_{h, \perp})$ a été utilisée pour désigner les champs électromagnétiques. Comme dans le paragraphe 2.5.1.1, le système d'équations différentielles ordinaires (2.65) est résolu par une méthode de Runge-Kutta d'ordre trois [127].

2.6 Résultats numériques

2.6.1 Construction d'un équilibre water-bag

Ce paragraphe est dédié à la construction de conditions initiales pour les équations water-bag. La condition initiale est construite comme une perturbation d'un équilibre homogène $f_0(v)$. Pour des raisons de simplicité on suppose que la fonction f_0 est paire selon la variable v (moments impaires nuls). Dans le formalisme water-bag, cela revient à prendre des contours d'équilibre symétriques $\pm v_{0j}$, $1 \leq j \leq \mathcal{N}$. On définit le moment d'ordre ℓ , \mathcal{M}_ℓ , de f_0 (ℓ pair)

$$\mathcal{M}_\ell(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} v^\ell f_0(v) dv \quad (2.66)$$

et le moment d'ordre ℓ de la fonction water-bag

$$\mathcal{M}_\ell(\text{MWB}) = \frac{1}{\ell+1} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} 2\mathcal{A}_j v_{0j}^{\ell+1}. \quad (2.67)$$

On suppose que l'axe des vitesses est échantillonné par une séquence v_{0j} . En égalant les équations (2.66) et (2.67) pour $\ell = 0, 2, \dots, 2(\mathcal{N}-1)$ on obtient un système à \mathcal{N} équations et \mathcal{N} inconnues \mathcal{A}_j , $j = 1, \dots, \mathcal{N}$. Une intégration par parties donne

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} 2\mathcal{A}_j v_{0j}^{\ell+1} = - \int_{-\infty}^{\infty} v^{\ell+1} \frac{df_0}{dv} dv, \quad \ell = 0, 2, \dots, 2(\mathcal{N}-1). \quad (2.68)$$

La fonction water-bag à \mathcal{N} bags est équivalente à la fonction de distribution continue jusqu'aux moments d'ordre $\ell_{\max} = 2(\mathcal{N}-1)$. Cependant l'équation (2.68) a la forme d'un système de Vandermonde qui devient mal conditionné pour les grandes valeurs de \mathcal{N} (en l'occurrence avec $\mathcal{N} = 15$ et une vitesse de coupure $v_{0\mathcal{N}} = 5v_{th}$, v_{th} étant la vitesse thermique, les éléments de la matrice varient de 1 à 5^{28} !). Une meilleure solution consiste à prendre la discrétisation

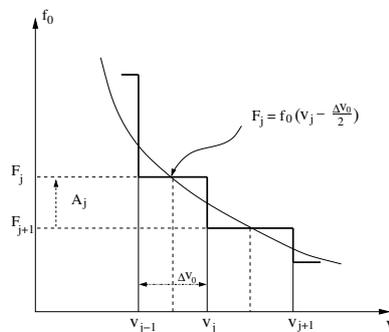


FIGURE 2.4 – Construction d'un équilibre water-bag à partir d'une fonction de distribution continue.

régulière $v_{0j} = (j - \frac{1}{2})\Delta v_0$ (cf Fig. 2.4) en définissant $F_j = f_0(v_{0j} - \frac{\Delta v_0}{2})$ avec $\Delta v_0 = \frac{2v_{0\mathcal{N}}}{2\mathcal{N}-1}$. A partir de l'équation (2.68) la solution est directe

$$\mathcal{A}_j = f_0\left(v_{0j} - \frac{\Delta v_0}{2}\right) - f_0\left(v_{0j} + \frac{\Delta v_0}{2}\right) + \mathcal{O}(\Delta v_0^3), \quad (2.69)$$

et l'équivalence au sens des moments (2.68) est vérifié à l'ordre deux en Δv_0 . La condition initiale v_{0j}^\pm est telle que

$$v_{0j}^\pm = \pm v_{0j}(1 + \eta \delta v(z)), \quad (2.70)$$

où η est réel et δv une fonction périodique en z .

En outre il bien connu que l'équation de Vlasov conserve un ensemble de quantités physiques et

mathématiques, comme la masse, l'entropie cinétique, l'énergie totale, les normes L^p ($p \geq 0$) et plus généralement les intégrales $\beta(f)$ de l'espace des phases où β est une fonction régulière. Ces quantités sont aussi naturellement conservées, en utilisant la définition de la fonction de distribution (2.6) dans la définition des quantités considérées. Par exemple l'énergie totale conservée par le modèle water-bag s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \sum_j \mathcal{A}_j \int dz (v_j^{+3} - v_j^{-3}) + \frac{1}{2} \sum_j \mathcal{A}_j \int dz (v_j^+ - v_j^-) \phi \\ + \frac{1}{2} \sum_j \mathcal{A}_j \int dz (v_j^+ - v_j^-) |A_\perp|^2 dz + \frac{1}{2} \int dz (|\partial_z A_\perp|^2 + |\partial_t A_\perp|^2). \end{aligned}$$

2.6.2 Amortissement Landau des ondes de Langmuir

Dans cette section on s'intéresse à l'amortissement Landau linéaire des ondes de Langmuir qui correspond à un amortissement d'ondes sans dissipation d'énergie. L'effet Landau peut être vu comme un processus de mélange de phase des fréquences réelles [179, 22] qui est similaire au traitement par Van Kampen et Case [212, 58] des oscillations électronique d'un plasma. Initialement les bags sont en phase. Avec le temps les bags commencent à être déphasés l'un par rapport à l'autre parce que chaque bag a sa propre vitesse de phase (déterminée par sa propre fréquence et le mode excité) qui diffère d'un bag à l'autre. Le mélange des phases est responsable de l'effet Landau, i.e. l'amortissement des ondes de Langmuir. Plus loin en temps il existe un temps de récurrence où tous les bags sont de nouveau en phases, comme à l'instant initial et les ondes électriques retrouvent leur énergie. Dans la limite $v_\phi = \omega/k \gg v_{th}$ la réponse linéaire du plasma est donnée par la relation de dispersion $\omega^2 = \omega_p^2 + 3v_{th}^2 k^2$ et le taux d'amortissement $\gamma = -\sqrt{\pi} \omega_p (\omega_p / (k v_{th}))^3 \exp(-\omega_p^2 / (k^2 v_{th}^2)) \exp(-3/2)$. Les paramètres sont fixés à $L = 4\pi$, $v_{th} = 1$, $\mathcal{N} = 16$, $v_{max} = 6$ et $n_0 = 1$. La condition initiale (2.70) est fixée en prenant la fonction sinus pour δv . La fréquence d'oscillation et le taux d'amortissement donnés par la simulation numérique du système (2.45)-(2.46) sont respectivement $\omega = 1.415$ et $\gamma = -0.153$, ce qui est en accord avec les valeurs théoriques $\omega = 1.4156$ et $\gamma = -0.1533$. De plus le temps de récurrence théorique $T_R = 2\pi / (k \Delta v)$ est égal à 32.46, ce qui est aussi en accord avec celui observé sur la figure 2.5. En outre les erreurs relatives associées aux variations de la norme L^2 , l'entropie cinétique, la masse ou la norme L^1 sont toujours en dessous de 10^{-13} . L'erreur relative associée à la variation de l'énergie totale reste en dessous de 10^{-8} pour la discrétisation $\Delta x = 0.7862$, $\Delta v = 0.325$. Ces propriétés de conservation sont meilleures que celles obtenues par les schémas semi-Lagrangiens (code Vlasov). Pour le même cas test on obtient des erreurs relatives en dessous de 10^{-5} pour les discrétisations $\Delta x = 0.3925$, $\Delta v = 0.1875$ [29] et $\Delta x = 0.3925$, $\Delta v = 0.25$ [178]. En effet dans le cas des schémas semi-Lagrangiens, résolvant l'équation de Vlasov dans l'espace des phases, les erreurs relatives associées à la variation des quantités conservées augmentent quand la fonction de distribution est régularisée, i.e. lorsque la taille des structures générées par le flot Lagrangien devient plus petite que la taille des cellules de l'espace des phases. Ce phénomène est moins fort dans le cas du water-bag car on suit des contours de l'espace des phases, i.e. que la fonction de distribution entre deux contours n'a pas besoin d'être résolue puisque la solution est analytiquement connue (constante).

2.6.3 Amortissement Landau des ondes acoustiques ioniques

Si une onde a une vitesse de phase assez faible pour être proche de la vitesse thermique, le phénomène d'amortissement Landau ionique peut apparaître. La relation de dispersion des ondes ioniques est $\omega/k = v_s = ((Z_i k_B T_e + 3k_B T_i) / m_i)^{1/2}$. Si $T_e \leq T_i$ ou $T_e \sim T_i$, la vitesse de phase est comprise dans la région où la fonction Maxwellienne non perturbée à une pente négative. Par conséquent les ondes acoustiques ioniques sont amorties fortement. D'un autre côté les ondes ioniques se propagent sans amortissement si $T_e \gg T_i$ puisque la vitesse de phase se trouve loin dans la queue de la fonction de distribution. Pour une seule espèce d'ions, dans la limite $k\lambda_D \ll 1$ (λ_D est la longueur de Debye) la relation de dispersion s'écrit $Z'(\omega / (k v_{th})) =$

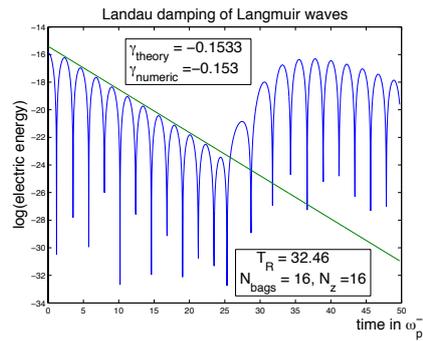


FIGURE 2.5 – Evolution en temps du Logarithme de l'énergie électrique.

$2T_i/(Z_i T_e) = 2\tau/Z_i$, où $Z(\zeta) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}/(t-\zeta)dt$ est la fonction de dispersion plasma. Les paramètres sont fixés à $L = 4\pi$, $v_{th} = 1$, $\mathcal{N} = 16$, $v_{max} = 6$, $n_0 = 1$, $Z_i = 1$ et $\tau = 0.5$. La condition initiale (2.70) est fixée en prenant la fonction cosinus pour δv . Le taux d'amortissement donné par la simulation numérique des équations (2.45) et (2.47) est $\gamma = 0.288$, ce qui est en accord avec la valeur théorique $\gamma = 0.290$. De plus le temps de récurrence théorique $T_R = 2\pi/(k\Delta v)$ est égal à 32.46, ce qui est aussi en accord avec l'expérience numérique (cf Fig. 2.6). Finalement les erreurs relatives associées aux variations de la norme L^2 -norm, l'entropie cinétique, l'énergie totale et la masse ou la norme L^1 restent en dessous de 10^{-12} .

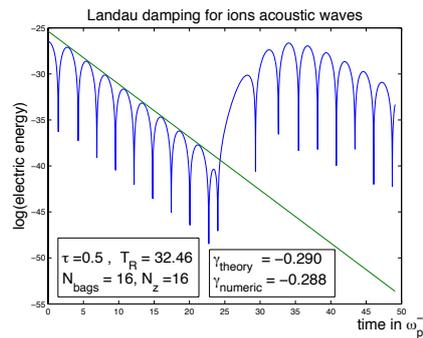


FIGURE 2.6 – Evolution en temps du Logarithme de l'énergie électrique.

2.6.4 Décalage non linéaire de la fréquence Bohm-Gross d'une onde plasma

Dans ce paragraphe on considère un plasma périodique plongé dans une boîte de longueur $L = 2\pi/k_0$ et on considère une condition initiale constituée d'un seul bag

$$v^{\pm}(t=0, z) = \pm v_0(1 + \varepsilon \cos(kx)),$$

où $k = \ell k_0$ (ℓ entier). Puisque toutes les vitesses sont normalisées à la vitesse thermique on a $v_0 = \sqrt{3}$ et $A = A_1 = (2\sqrt{3})^{-1}$. Alors la densité initiale $n(t=0, z) = A(v^+ - v^-)$ et la vitesse moyenne $u(t=0, z) = (v^+ + v^-)/2$ sont respectivement données par $n(t=0, z) = 1 + \varepsilon \cos(kz)$ et $u(t=0, z) = 0$. Le système (2.45)-(2.46) avec un bag ($\mathcal{N} = 1$) est plus simple que le système Vlasov-Poisson et permet un développement analytique ([21, 89]) dans l'approximation de champ faible ($\varepsilon \rightarrow 0$). Dans le cas linéaire on obtient la relation de Bohm-Gross

$$\omega_k^2 = 1 + 3k^2. \quad (2.71)$$

Dans le cas Maxwellien cette expression est valable pour $k \rightarrow 0$, en négligeant les termes en $\mathcal{O}(k^4)$ alors que pour le modèle water-bag ce résultat est exacte. En poussant les calculs jusqu'à l'ordre trois en ε , une méthode de perturbation à échelle multiple permet d'obtenir la relation de dispersion [21]

$$\omega'_k = \omega_k + \frac{\varepsilon^2}{16} \left(\frac{(1 + \omega_{2k}^2)^2}{12\omega_k} + \frac{\omega_k}{3}(2 + 3\omega_{2k}^2) - \frac{2}{\omega_k\omega_{2k}^2} \right), \quad (2.72)$$

où ω_k est donnée par (2.71) et ω_{2k} est donnée par la même formule avec le mode $2k$. Ici on tente de retrouver la fréquence non linéaire (2.72). La condition initiale est paramétrée par $\varepsilon = 0.1$ et $k = k_0 = 0.6$ (i.e excitation du premier mode de Fourier). Puisque $n(t, k_0)$ se comporte comme $\varepsilon/2 \cos(\omega'_{k_0} t)$, on trace sur la figure 2.7 la différence $n(t, k_0) - \varepsilon/2 \cos(\omega_{k_0} t)$ qui doit osciller avec une amplitude variant comme $\varepsilon \sin((\omega'_{k_0} - \omega_k)t)/2$. Pour $\varepsilon = 0.1$ et $k = k_0 = 0.6$ l'équation (2.72) donne $\omega'_{k_0} - \omega_k = 6.67 \cdot 10^{-3}$. On obtient une enveloppe qui est une droite de pente $3.357 \cdot 10^{-4}$, ce qui est conforme à la valeur analytique $\varepsilon/2(\omega'_{k_0} - \omega_{k_0})$.

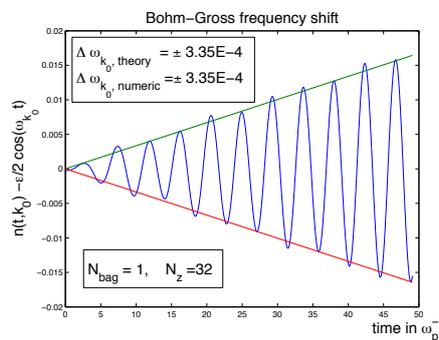


FIGURE 2.7 – Evolution en temps de $n(t, k_0) - \varepsilon/2 \cos(\omega_{k_0} t)$.

2.6.5 Modes de Van Kampen

Les modes de Van Kampen sont des modes propres du modèle water-bag-Poisson linéarisé (2.45)-(2.46). Si on linéarise les équations (2.45)-(2.46) pour un plasma électronique périodique autour d'un équilibre homogène, i.e. $v_j^\pm(t, z) = \pm v_{0j} + \delta v_j^\pm(t, z)$ avec $|\delta v_j^\pm| \ll v_{0j}$, on obtient pour les perturbations $\delta v_j^\pm(t, z)$ les équations

$$\partial_t v_j^\pm \pm v_{0j} \partial_z \delta v_j^\pm = -E_z, \quad \partial_z E_z = - \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-). \quad (2.73)$$

Après la décomposition en séries de Fourier de (2.73) et en supposant que la dépendance en temps des modes de Fourier $\mathcal{A}_j \delta v_{jk}^\pm(t)$ est de la forme $\mathcal{A}_j \delta v_{jk}^\pm(t) = w_{jkn}^\pm \exp(-\omega_n t)$ nous trouvons l'équation

$$k v_{0j} w_{jkn}^\pm + \frac{\mathcal{A}_j}{k} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (w_{ikn}^+ - w_{ikn}^-) = \omega_n w_{jkn}^\pm. \quad (2.74)$$

Si on prend la condition de normalisation $\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} (w_{ikn}^+ - w_{ikn}^-) = 1$ qui est équivalente à la relation de dispersion (2.13) ($\epsilon(k, \omega) = 0$), à partir de (2.74) on obtient le mode propre water-bag $w_{jkn}^\pm \exp(-\omega_n t)$ où

$$w_{jkn}^\pm = \frac{1}{k} \frac{\mathcal{A}_j}{(\omega_n \mp k v_{0j})}. \quad (2.75)$$

Le mode water-bag est très similaire au mode de Van Kampen [212]

$$\chi_k(\omega, v) = - \frac{\partial_v f_0}{k} \text{v.p.} \frac{1}{\omega - kv} + \lambda(\omega) \delta(v - \omega/k),$$

où $-\partial_v f_0$ et \mathcal{A}_j jouent le même rôle (cf Sec. 2.6.1) et $\lambda(\omega)$ est déterminé par la normalisation $\int_{\mathbb{R}} \chi_k(\omega, v) dv = 1$. La distribution de Dirac qui est présente dans le mode de Van Kampen disparaît au niveau du mode water-bag parce que la vitesse de phase ω_n/k du mode water-bag est strictement comprise entre deux bags v_{0j} . En fait les modes water-bag dont le spectre en fréquence est discret et fini sur l'axe réel apparaît comme la discrétisation des modes de Van Kampen dont le spectre en fréquence est dense sur l'axe réel. La solution générale du système est obtenue grâce à une combinaison linéaire des modes propres water-bag (2.75), i.e. $\mathcal{A}_j \delta v_{jk}^{\pm}(t) = \sum_n C_n w_{jkn}^{\pm} \exp(-\omega_n t)$ où les constantes C_n sont déterminées par les conditions initiales. La sommation sur l'indice n correspond à la superposition d'oscillations harmoniques et est responsable de l'effet Landau (cf Sec. 2.6.3). Ici on souhaite exciter un unique mode (k, ω_ℓ) , i.e. $C_n = \varepsilon \delta_{n\ell}$ où (k, ω_ℓ) satisfait la relation de dispersion (2.13) ($\epsilon(k, \omega_\ell) = 0$). De l'expression (2.75) on déduit la forme de la condition initiale $\delta v_{jk}^{\pm}(t=0) = (\varepsilon/k)/(\omega_\ell \mp kv_{0j})$, et la solution du problème (2.73) est l'onde progressive

$$\delta v_j^{\pm}(t, z) = \frac{\varepsilon}{k} \frac{1}{(\omega_\ell \pm kv_{0j})} \cos(kz - \omega_\ell t)$$

se propageant à la vitesse de phase $v_{\varphi, \ell} = \omega_\ell/k$ et la densité associée devient $\delta n(t, z) = \sum_{i=1}^N \mathcal{A}_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) = \varepsilon \cos(kz - \omega_\ell t)$. Ici on choisit $k = 2.72$, $L_z = 2\pi n_k/k$ où $n_k = 13$. La solution de l'équation de dispersion (2.13) donne $\omega_\ell = 1.68 \times 10^{-1}$. La vitesse de phase du mode $v_{\varphi, \ell} = 6.19 \times 10^{-2}$ est comprise entre le premier et le second bag, i.e. ceux qui sont le plus déformés. Les autres paramètres sont $v_{th} = \sqrt{1/511}$, $\mathcal{N} = 4$, $v_{max} = 0.22$, $L_z = 30.02$ et $\varepsilon = 10^{-3}$. Le temps final de la simulation est $T = 100\omega_p^{-1}$. Le tableau 2.1 ci-dessous donne l'erreur en norme L^∞ entre la solution exacte et numérique et le taux de convergence associé. Le taux théorique de convergence de la méthode RKGD étant trois, les résultats du tableau

N_z	$\ v_{h,1}(T) - v_1(T)\ _{L^\infty}$	ordre	$\ n_h(T) - n(T)\ _{L^\infty}$	ordre
128	4.42×10^{-6}		1.77×10^{-5}	
256	5.89×10^{-7}	2.90	2.85×10^{-6}	2.66
512	7.48×10^{-8}	2.97	3.84×10^{-7}	2.90
1024	9.41×10^{-9}	2.99	4.87×10^{-8}	2.98

TABLE 2.1 – L^∞ -error and convergence rate.

2.1 montrent que le schéma reproduit les bons résultats avec la précision attendue.

2.6.6 L'instabilité de diffusion Raman stimulée dans l'interaction laser-plasma

L'instabilité de diffusion Raman stimulée est une instabilité paramétrique à trois ondes : l'onde électromagnétique incidente appelée onde pompe (k_0, ω_0) qui alimente deux autres ondes instables ; une onde électromagnétique diffusée (k_s, ω_s) ; et une onde plasma électro-nique (k_e, ω_e) . L'instabilité Raman a lieu lorsque les conditions d'accord des vecteurs d'ondes, $k_0 = k_s + k_e$, et des fréquences, $\omega_0 = \omega_s + \omega_e$, sont réalisées, avec la relation de dispersion normalisée de Bohm-Gross, $\omega^2 = 1 + 3k^2 v_{th}^2$, pour l'onde plasma et la relation de dispersion, $\omega^2 = 1 + k^2$, pour les deux autres ondes électromagnétiques. Les conditions d'accord peuvent être satisfaites si et seulement si $n_e/n_{crit} < 1/4$ où n_{crit} est la densité critique au-dessus de laquelle les ondes électromagnétiques ne se propagent plus. Les conditions aux limites périodiques impliquent une sélection des différents nombres d'ondes pour obtenir soit de la diffusion avant ($\omega_s/k_s > 0$), soit de la diffusion arrière ($\omega_s/k_s < 0$). Si on pose $k_0 = rk_\ell$ où r est le nombre rationnel p/q , alors les contraintes du problème conduisent à l'équation bi-carré

$$((2r - 1 - 3v_{th}^2)^2 - 12v_{th}^2(r - 1)^2)k_e^4 + (-6v_{th}^2 - 4r^2 + 4r - 2)k_e^2 - 3 = 0.$$

Ici on résout le système formé par les équations (2.45)-(2.46) et (2.48). On part d'un équilibre Maxwellien homogène avec une vitesse thermique $v_{th} = \sqrt{0.1/511}$. La vitesse de coupure est

$v_{\max} = 0.07$. Le plasma est plongé dans une boîte périodique de longueur $L = 10.75$. Une onde électromagnétique pompe polarisée circulairement à droite ($\nu = +1$) ($E_{\perp}^0, B_{\perp}^0, A_{\perp}^0$) est introduite dans la boîte

$$E_{\perp 1}^0(t = 0, z) = E_0 \cos(k_0 z), \quad E_{\perp 2}^0(t = 0, z) = \nu E_0 \sin(k_0 z). \quad (2.76)$$

L'amplitude du champ E_0 est liée à l'amplitude du moment p_{osc} , associé au mouvement d'oscillation d'un électron dans une onde plane, par la relation $p_{osc} = E_0/\omega_0$. Ici on prend $p_{osc} = 10^{-2}$. Les composantes du champ magnétique s'écrivent

$$B_{\perp 1}^0(t = 0, z) = -\nu E_0 \frac{k_0}{\omega_0} \sin(k_0 z), \quad B_{\perp 2}^0(t = 0, z) = E_0 \frac{k_0}{\omega_0} \cos(k_0 z). \quad (2.77)$$

La condition initiale pour le potentiel vecteur transverse A_{\perp} , est donnée par

$$A_{\perp 1}^0(t = 0, z) = \frac{E_0}{\omega_0} \sin(k_0 z), \quad A_{\perp 2}^0(t = 0, z) = -\nu \frac{E_0}{\omega_0} \cos(k_0 z). \quad (2.78)$$

On prend des expressions similaires pour les ondes diffusées ($E_{\perp}^s, B_{\perp}^s, A_{\perp}^s$) avec $a_s = 10^{-6}$. On pose $r = 2/3$ et les nombres d'ondes sont choisis tels que $k_e/k_z = 6$, $k_0/k_z = 4$ et $k_s/k_z = -2$. Les autres paramètres sont $\omega_0 = 2.54$, $\omega_s = 1.54$, $\omega_e = 1.$, $k_0 = 2.33$, $k_s = -1.17$, $k_e = 3.5$, $n_0/n_{crit} = 1.55 \times 10^{-1}$, $\mathcal{N} = 6$, $N_z = 128$ et $\Delta t = 1.68 \times 10^{-2}$.

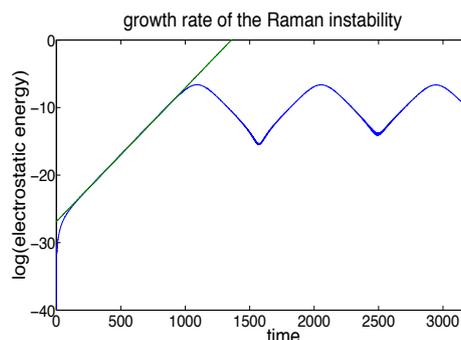


FIGURE 2.8 – Taux de croissance de l'instabilité Raman et évolution du Logarithme du champ électrique.

Dans une première étape le champ électrique croît exponentiellement, c'est l'instabilité Raman linéaire. Le taux de croissance théorique, obtenu à partir d'une linéarisation des équations fluides [106] est

$$\gamma = \frac{k_e p_{osc}}{2\sqrt{2}\omega_e \omega_s} = 9.97 \times 10^{-3},$$

ce qui est très proche de la valeur numérique 9.90×10^{-3} (cf Fig. 2.8). Après une première étape de croissance exponentielle de l'instabilité SRS, l'évolution des ondes et des particules (cf Fig. 2.9) montre un comportement oscillatoire caractérisé par un transfert d'énergie entre la pompe, l'onde diffusée et l'onde plasma comme dans le cas d'une instabilité paramétrique à trois ondes.

2.6.7 Les ondes non linéaires électrostatiques d'électrons cinétiques

Les modes KEEN (Kinetic Electron Electrostatic Nonlinear) sont des modes électrostatiques acoustiques de l'équation Vlasov-Poisson unidimensionnelle, qui se propagent avec une vitesse de phase autour de la vitesse thermique et peuvent être vus comme une version non stationnaire des modes BGK (Bernstein-Greene-Kruskal) [26] qui décrivent des ondes électrostatiques progressives invariantes dans les plasmas. Une explication, pour l'existence de tels modes, qui

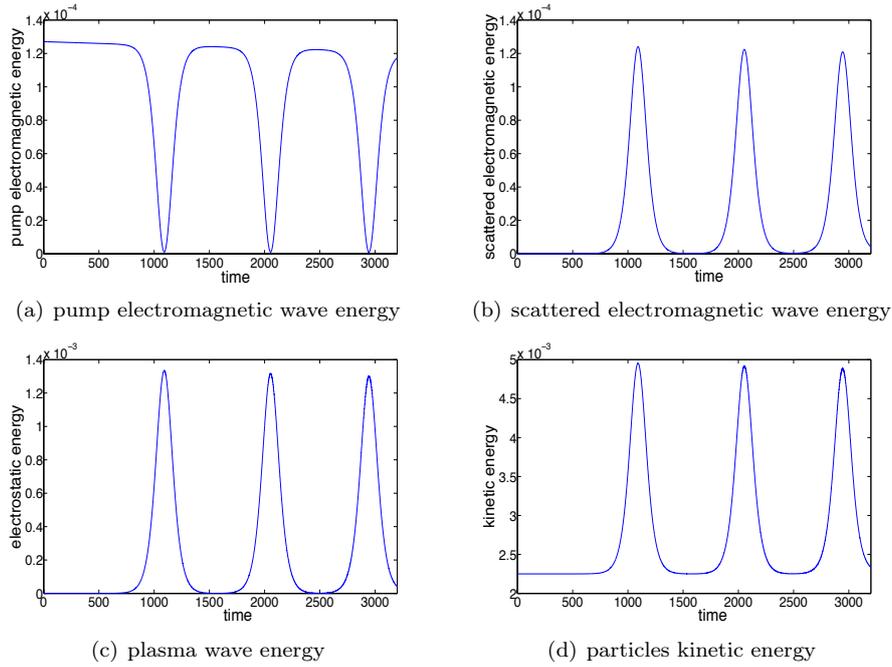


FIGURE 2.9 – Evolution en temps de l'énergie des ondes et des particules.

utilise les solutions de Van Kampen-Case de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée, est donnée par Holloway et Dornig [143]. Les ondes KEEN seraient associées à une excitation d'un mode de Van Kampen autour de la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k \sim v_{th}$. On obtient alors un diagramme de dispersion où la branche Bohm-Gross rejoint la branche acoustique [143, 158, 159](cf Fig. 4 dans [143]). Une autre façon d'expliquer l'existence de tels modes est d'étudier la solution Landau de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée. En effet d'après la relation de dispersion on peut observer qu'il existe une infinité de pôles au-delà du pôle de Landau dont les contributions sont rapidement amorties et qui jouent un rôle que sur des temps très court. Si on peut modifier la condition initiale f_0 de telle sorte à la rendre "horizontale" autour de la vitesse de phase d'un de ces pôles amortis, alors une structure peut apparaître et se propager avec une vitesse de phase plus petite celle du pôle de Landau. Bien entendu, il faut un mécanisme pour exciter de tels pôles alors que celui de Landau est naturellement excité par les perturbations de densité électronique. Ce mécanisme est lié à la force pondéromotrice engendrée par le mélange optique d'ondes laser comme cela se fait en fusion par confinement inertiel. Aussi, sommes nous intéressés par résoudre le système formé par les équations (2.45)-(2.46) et (2.48).

A partir de la relation dispersion (2.13) avec \mathcal{N} bags, dans la limite $k\lambda_D \ll 1$, on peut observer que le dernier pôle $\omega_{\mathcal{N}}$ correspond au pôle de Landau, qui est régi par la relation Bohm-Gross $\omega_{\mathcal{N}}/\omega_p = 1 + 3k^2\lambda_D^2 + \mathcal{O}(k^4\lambda_D^4)$ alors que les autres $\mathcal{N} - 1$ pôles $\omega_{n < \mathcal{N}}$ sont tels que $\omega_n/\omega_p \sim k\lambda_D$, et correspondent à des ondes de type acoustique. Ces modes water-bag acoustiques peuvent résonner avec une branche électromagnétique pour donner un effet de type diffusion Raman arrière. Le mélange des phases peut empêcher ces modes de se développer et seule la diffusion Raman (avant ou arrière) peut résonner avec la branche Bohm-Gross. Cependant si on introduit une onde laser dont la fréquence et le nombre d'onde sont en accord avec un de ces autres pôles water-bag acoustiques, alors ces modes peuvent se propager. Afin d'éviter la résonance entre le mode Bohm-Gross et la branche électromagnétique la condition $n_e/n_{crit} > 1/4$ doit être satisfaite. Soit (k_0, ω_0) l'onde pompe, et (k_s, ω_s) l'onde électromagnétique diffusée choisies de telle sorte que un des pôles water-bag de type acoustique (k_ℓ, ω_ℓ) (avec $\ell < \mathcal{N}$) entre en résonance (avec $k_s < 0$), i.e. $\omega_0 = \omega_s + \omega_\ell$ et $k_0 = k_s + k_\ell$, alors un unique pôle water-bag de type acoustique peut être excité. De plus les ondes électromagnétiques et le mode water-bag doivent respectivement satisfaire les relations de dispersion $\omega^2 = 1 + k^2$ et

$\epsilon(k_\ell, \omega_\ell) = 0$. Si on pose $k_0 = rk_\ell$ où r est un nombre rationnel p/q ou un nombre réel proche d'un rationnel, alors les contraintes du problème conduisent à l'équation du second degré

$$-r^2 + r + \frac{\omega_\ell^2 - k_\ell^2}{4k_\ell^2} - \frac{\omega_\ell^2}{k_\ell^2} \frac{1}{\omega_\ell^2 - k_\ell^2} = 0.$$

Les racines $r = 1/2$, $r > 1/2$, et $r < 1/2$ correspondent respectivement à $\omega_\ell = 0$, $\omega_\ell > 0$ et $\omega_\ell < 0$. On part d'un équilibre homogène Maxwellien avec une vitesse thermique $v_{th} = \sqrt{1/511} = 4.42 \times 10^{-2}$. La vitesse de coupure est $v_{max} = 0.22$. Le plasma est plongé dans une boîte périodique de longueur $L = 30.02$. Des ondes électromagnétiques, polarisées circulairement à droite, pompe et sonde diffusée sont introduites dans le plasma avec des moments respectifs $a_0 = p_{osc} = E_0/\omega_0 = 10^{-2}$ et $a_s = 10^{-6}$. La structure initiale de l'onde pompe ($E_\perp^0, B_\perp^0, A_\perp^0$) et de l'onde sonde diffusée ($E_\perp^s, B_\perp^s, A_\perp^s$) est donnée par les équations (2.76)-(2.78). On pose $r = 7/13$ et on choisit des nombres d'ondes tels que $k_\ell/k_z = 13$, $k_0/k_z = 7$ et $k_s/k_z = -6$. Les autres paramètres sont $\omega_0 = 1.77$, $\omega_s = 1.61$, $\omega_e = 1.68 \times 10^{-1}$, $k_0 = 1.46$, $k_s = -1.26$, $k_e = 2.72$, $n_0/n_{crit} = 3.17 \times 10^{-1}$, $\mathcal{N} = 4$, $N_z = 256$ et $\Delta t = 2.34 \times 10^{-2}$. La vitesse de phase

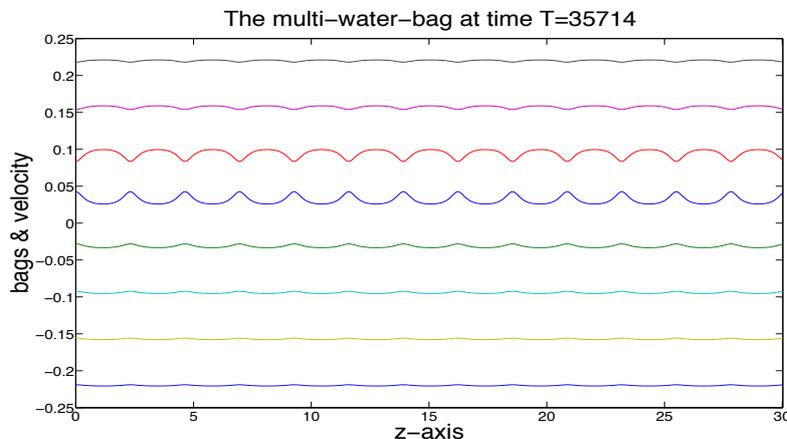


FIGURE 2.10 – Le water-bag au temps $T = 35714$.

du mode plasma vaut $v_{\varphi,\ell} = 6.19 \times 10^{-2} \sim 1.4v_{th}$ alors que la valeur théorique de la vitesse de phase du mode Bohm-Gross est $v_{\varphi,BG} = \sqrt{1 + 3k_\ell^2 v_{th}^2}/k_\ell = 3.75 \times 10^{-1}$, ce qui est bien au-delà de la vitesse de coupure. En outre les erreurs relatives associées aux variations de la norme L^2 , l'entropie cinétique, la masse ou la norme L^1 restent en dessous de 10^{-10} , alors que l'erreur relative associée à la variation de l'énergie totale reste en dessous de 4×10^{-2} au temps final $T = 3.5714 \times 10^4$. Sur la figure 2.10, on observe la stabilité non linéaire en temps long du mode plasma à basse fréquence que l'on a excité. En effet sur la figure 2.10, on observe treize trous qui correspondent à autant de vortex. Ce mode non linéaire basse fréquence qui se déplace avec une vitesse de phase autour de la vitesse thermique ($v_{\varphi,\ell} \sim 1.4v_{th}$) est un mode que l'on observe dans les simulations laser-plasma en utilisant une description Vlasovienne électromagnétique [1, 2, 115, 116, 36], les fameux modes KEEN. Le modèle water-bag se révèle être un modèle capable d'expliquer la formation de modes KEEN et plus généralement donne le mécanisme de formation de structures cohérentes à basse fréquence qui surgissent dans le régime non linéaire de l'interaction laser-plasma et persistent sur des temps très long.

Chapitre 3

Modèles gyro-water-bag pour les plasmas magnétisés

Sommaire

3.1	Introduction	44
3.2	L'équation gyrocinétique	44
3.3	Le modèle gyro-water-bag	46
3.4	Invariants de Liouville et réduction de l'espace des phases	47
3.5	Analyse linéaire	48
3.5.1	Relation de dispersion	48
3.5.2	Construction d'un équilibre local	49
3.5.3	Seuil d'instabilité et taux de croissance	50
3.6	Analyse quasi-linéaire	50
3.7	Le problème de Cauchy	54
3.8	Normalisation et lois de conservation	55
3.9	Dérivation d'un modèle gyro-water-bag auto-cohérent	56
3.10	Approximation numérique	57
3.10.1	Approximation numérique du système non linéaire	57
3.10.2	Approximation numérique du système quasi-linéaire	60
3.11	Résultats numériques	64
3.11.1	Construction d'un équilibre gyro-water-bag	64
3.11.2	Instabilité ITG et turbulence gyrocinétique dans un cylindre	65

3.1 Introduction

Le temps de confinement de l'énergie dans un tokamak (enceinte toroïdale dans laquelle est confiné le plasma grâce à l'action d'un champ magnétique intense) est gouverné par l'évolution turbulente des fluctuations électromagnétiques basses fréquences d'un plasma non uniforme. Les micro-instabilités qui se développent au sein du plasma (principalement dues à la présence de gradients de pression, température et densité) sont à l'origine de ce transport turbulent donnant lieu à un transport dit anormal de l'énergie dans les plasmas de tokamak. Les instabilités ITG (Ion-Temperature-Gradient) basses fréquences constituent avec les modes d'électrons piégés (TEM) [180], l'un des candidats les plus sérieux pour tenir compte du transport anormal [217]. Le calcul des diffusivités thermiques turbulentes dans les plasmas de fusion est de première importance puisque le temps de confinement de l'énergie est déterminé par ces coefficients de transport. Durant ces dernières années la turbulence ionique dans les plasmas magnétisés de tokamaks a été étudiée de manière intensive à partir de simulations fluides ([95, 111, 166]) ou de simulations gyrocinétiques utilisant des codes PIC ([182, 207, 165]) ou Vlasov ([86, 131, 94, 57]).

Il est maintenant notoire ([92]) que le niveau de description, cinétique ou fluide, peut changer de manière significative aussi bien le seuil des instabilités que le niveau du transport turbulent prédit. Par conséquent il est important que les simulations gyrocinétiques quantifient l'écart de la fonction de distribution à la Maxwellienne qui constitue l'hypothèse classique des fermetures fluides.

Dans un papier récent [195] une comparaison entre l'approche fluide et cinétique a été effectuée en étudiant le développement d'instabilités d'interchange cinétiques en trois dimensions. Le modèle sous-jacent est un modèle de dérive-cinétique qui est décrit par une fonction de distribution dépendant seulement de deux variables spatiales et paramétrée par l'énergie. Dans ce cas il apparaît que la fonction de distribution est très loin d'une Maxwellienne et ne peut pas être décrite par un petit nombre de moments. L'interaction résonante onde-particule joue certainement un rôle important et la plupart des fermetures qui ont été développées sont inefficaces.

D'un autre côté, bien que plus précises, les simulations cinétiques du transport turbulent sont plus coûteuses en terme de ressources calcul que les simulations fluides. C'est la raison pour laquelle il est intéressant de revisiter une approche alternative basée sur la représentation water-bag qui est une solution faible de l'équation de Vlasov-gyrocinétique.

3.2 L'équation gyrocinétique

Rigoureusement, on devrait résoudre une équation cinétique à six dimensions (Vlasov-Maxwell, Vlasov-Darwin) pour déterminer la fonction de distribution statistique à une particule. Cependant pour des plasmas fortement magnétisés les équations gyrocinétiques non linéaires sont dérivées grâce à un développement en échelles espace-temps multiple qui repose sur l'existence d'un ou plusieurs petits paramètres sans dimensions. En l'occurrence, le rayon de Larmor ρ est plus petit que l'échelle de longueur caractéristique L , selon laquelle varient le champ magnétique, la densité et la température. De plus le mouvement cyclotronique des ions est plus rapide que l'échelle de temps de l'évolution de la turbulence, au moins durant les premières phases de l'interaction non linéaire. La procédure usuelle [108], pour dériver les équations Vlasov gyrocinétiques consiste à calculer une solution itérative de l'équation de Vlasov gyro-moyennée développée en puissance du petit paramètre sans dimension ρ/L grâce à une méthode de perturbation. Un fondement moderne de la théorie gyrocinétique [97, 140, 54, 55] est basé sur deux procédures de transformations de Lie, permettant le passage de la dynamique Hamiltonienne des particules à la dynamique des gyro-centres en passant par la dynamique des centres guides grâce à un principe variationnel [54, 55], donnant ainsi lieu à la dérivation auto-cohérente des équations Vlasov-Maxwell gyrocinétiques non linéaires. Par conséquent, pour des plasmas fortement magnétisés, la théorie gyrocinétique non linéaire permet de transformer l'équation de Vlasov en un système d'équations à cinq dimensions dans l'espace des phases dans lequel le mouvement cyclotronique rapide n'apparaît plus explicitement mais où l'information

principale sur les particules est conservée.

Soit $f = f(t, \mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu)$ la fonction de distribution des gyro centres pour les ions. Alors les équations gyrocinétiques non linéaires dérivées dans [108, 97, 140, 54] sont

$$D_t f = \partial_t f + \dot{X}_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} f + \dot{X}_{\parallel} \cdot \nabla_{\parallel} f + \dot{v}_{\parallel} \partial_{v_{\parallel}} f = 0 \quad (3.1)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{X}_{\parallel} &= v_{\parallel} \mathbf{b}, & \dot{X}_{\perp} &= \mathbf{v}_{\mathbf{E}} + \mathbf{v}_{\nabla B} + \mathbf{v}_c \\ \mathbf{v}_{\mathbf{E}} &= \frac{1}{B_{\parallel}^*} \mathbf{b} \times \nabla \mathcal{J}_{\mu} \phi \\ \mathbf{v}_{\nabla B} &= \frac{\mu}{q_i B_{\parallel}^*} \mathbf{b} \times \nabla B \\ \mathbf{v}_c &= \frac{m_i v_{\parallel}^2}{q_i B_{\parallel}^*} \left(\frac{\mathbf{b} \times \nabla B}{B} + \frac{(\nabla \times \mathbf{B})_{\perp}}{B} \right) = \frac{m_i v_{\parallel}^2}{q_i B_{\parallel}^*} \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{N}}{R_c} \\ \dot{v}_{\parallel} &= -\frac{1}{m_i} \left(\mathbf{b} + \frac{m_i v_{\parallel}}{q_i B_{\parallel}^*} \mathbf{b} \times \frac{\mathbf{N}}{R_c} \right) \cdot (\mu \nabla B + q_i \nabla \mathcal{J}_{\mu} \phi) \\ \mathbf{B}^* &= \mathbf{B} + \frac{m_i v_{\parallel}}{q_i} \nabla \times \mathbf{b}, & B_{\parallel}^* &= \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

où $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ représente un vecteur unitaire tangent aux lignes de champ magnétique, \mathcal{J}_{μ} est l'opérateur de gyromoyenne, \mathbf{N}/R_c représente la courbure des lignes de champ, $q_i = Z_i e$, $e > 0$ étant la charge élémentaire de Coulomb, et $\mu = m_i v_{\perp}^2 / (2B)$, le moment magnétique ionique, est le premier invariant adiabatique des gyro centres ioniques. La structure de la fonction de distribution f , solution de (3.1), est de la forme

$$f(t, \mathbf{r}, v_{\parallel}, \mu) = \sum_{\ell} f_{\ell}(t, \mathbf{r}, v_{\parallel}) \delta(\mu - \mu_{\ell}). \quad (3.2)$$

Remarquons que le problème consistant à connaître quelle est la fonction de distribution asymptotique en μ dans (3.2) lorsqu'on considère un nombre infini de moments magnétiques est très intéressant car il permet de réduire la consommation du temps calcul et de l'espace mémoire dans les codes numériques. Dans [141, 155, 161], les auteurs prennent la distribution $\exp(-\mu B / k_B T_{i0})$.

Si on suppose que la distribution d'équilibre est Maxwellienne en μ avec une température T_{i0} , et varie linéairement avec la densité n_{i0} , alors après linéarisation autour de la fonction de distribution d'équilibre ($n_i = n_{i0} + \delta n_i$, $\delta n_i / n_{i0} \sim \varepsilon_{\delta} \ll 1$), la transformée de Fourier de l'équation de Poisson devient

$$\begin{aligned} &\{ |\mathbf{k}|^2 \lambda_{D_i}^2 + 1 - \Gamma_0(b) - [\Gamma_1(b) - \Gamma_0(b)] i \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\rho_i^2 \nabla_{\perp} \ln n_{i0}) \} Z_i q_i \frac{n_{i0}}{k_B T_{i0}} \phi_{\mathbf{k}} \\ &= Z_i \int J_0 \left(k_{\perp} \sqrt{\frac{2\mu}{\Omega_i q_i}} \right) f_{\mathbf{k}} 2\pi \frac{\Omega_i}{q_i} d\mu dv_{\parallel} - n_{e\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

où $\rho_i^2 = v_{thi}^2 / \Omega_i^2 = k_B T_i / (m_i \Omega_i^2)$ est le rayon de larmor ionique, $b = k_{\perp}^2 \rho_i^2$, $\lambda_{D_i}^2 = k_B T_i / (4\pi \varepsilon_0 Z_i^2 e^2 n_{i0})$ la longueur de Debye ionique, $\Gamma_n(b) = I_n(b) \exp(-b)$, I_n est la fonction de Bessel modifiée d'ordre n , et J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zéro. Le terme de gauche de l'équation (3.3) correspond à la différence entre la densité gyromoyennée $\frac{\Omega_i}{q_i} \int d\mu dv_{\parallel} \mathcal{J}_{\mu} f$ et la densité ionique N_i exacte qui est la plus petite contribution aux fluctuations de densité produite par la dérive de polarisation. Puisque dans ce travail on est essentiellement intéressé par le problème cinétique versus multi-fluides, on se restreint aux effets transverses liés à la vitesse de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ couplés à la dynamique parallèle. Les effets de courbure sont considérés comme une prochaine étape qui se situe au-delà ce travail. Aussi, nous nous intéressons au modèle réduit de dérive cinétique en géométrie cylindrique en considérant les approximations suivantes

- En plus de la géométrie cylindrique, nous supposons que les lignes du champ magnétique sont uniformes et que \mathbf{B} est constant le long de l'axe de la colonne (coordonnée z , $\mathbf{B} = B\mathbf{b} = B\mathbf{e}_z$). Il s'en suit que la vitesse de dérive perpendiculaire ne contient pas de terme lié à la courbure du champ magnétique ni de terme lié à la non uniformité spatiale du champ magnétique et en particulier on a $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}$.
- On suppose qu'il existe une séquence discrète finie d'invariants adiabatiques $\Xi = \{\mu\}$ liée à une séquence discrète finie de rayon de larmor ionique $\Lambda = \{\rho\}$ par $\mu = \rho^2 \Omega_i q_i / 2$. L'opérateur différentiel linéaire de gyromoyenne \mathcal{J}_μ devient la fonction de Bessel $J_0(k_\perp \sqrt{2\mu} / \sqrt{\Omega_i q_i})$ dans l'espace de Fourier. Si on suppose que $k_\perp \rho$ est petit ($k_\perp \rho \lesssim 1$) alors on peut utiliser l'approximation de Padé

$$J_0(k_\perp \rho) \sim 1 - \frac{k_\perp^2 \rho^2}{4} \sim \frac{1}{1 + \frac{k_\perp^2 \rho^2}{4}}$$

ce qui signifie en terme d'opérateur différentiel que l'on fait l'approximation

$$\mathcal{J}_\mu \sim \left(1 - \frac{\rho^2}{4} \Delta_\perp\right)^{-1} \quad (3.4)$$

- On linéarise le terme de gauche de l'équation (3.3) en considérant $k_\perp \rho_i$ petit et en négligeant tous les termes plus petits que $\mathcal{O}(k_\perp^2 \rho_i^2)$. De plus on suppose que la longueur de Debye des ions λ_{D_i} est largement plus petite que le rayon de Larmor des ions ρ_i et on suppose que Ω_i est une constante Ω_0 .
- L'inertie des électrons est ignorée, i.e. on choisit une réponse adiabatique pour les fluctuations basses fréquences des électrons. En d'autres termes la densité des électrons suit la fonction de distribution de Boltzmann

$$n_e = n_{e0} \exp\left(\frac{e}{k_B T_e} (\phi - \lambda \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}})\right)$$

où $\langle \phi \rangle_{\mathcal{M}}$ représente la moyenne du potentiel électrique ϕ sur une ligne du champ magnétique. De plus on suppose que l'énergie potentielle électrique est petite devant l'énergie cinétique des électrons, i.e. $e\phi / (k_B T_e) \sim \varepsilon_\delta \ll 1$. Le paramètre λ prend la valeur zéro ou un.

Sous ces hypothèses l'évolution de la fonction de distribution des gyro centres $f_\mu = f_\mu(t, \mathbf{r}_\perp, z, v_\parallel)$ est régie par l'équation de Vlasov gyrocinétique

$$\partial_t f_\mu + \mathcal{J}_\mu \mathbf{v}_E \cdot \nabla_\perp f_\mu + v_\parallel \partial_z f_\mu + \frac{q_i}{m_i} \mathcal{J}_\mu E_\parallel \partial_{v_\parallel} f_\mu = 0 \quad (3.5)$$

pour les ions (q_i, M_i) , couplée à une réponse adiabatique pour les électrons via les hypothèses de quasi-neutralité

$$-\nabla_\perp \cdot \left(\frac{n_{i0}}{B\Omega_0} \nabla_\perp \phi\right) + \frac{e\tau n_{i0}}{k_B T_{i0}} (\phi - \lambda \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}}) = 2\pi \sum_{\mu \in \Xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Omega_i}{q_i} \mathcal{J}_\mu f_\mu(t, \mathbf{r}, v_\parallel) dv_\parallel - n_{i0}. \quad (3.6)$$

Ici $q_i = Z_i e$, $Z_i n_{i0} = n_{e0}$, $T_e = T_{e0}$, $\tau = T_{i0} / T_{e0}$, $\lambda \in \{0, 1\}$, $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ et \mathbf{v}_E est la vitesse de dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$. Le profil de température ionique T_{i0} et de densité ionique n_{i0} varient selon la direction radiale. Le fait le plus important et intéressant est que f dépend, via un opérateur différentiel, seulement d'une dimension de vitesse v_\parallel .

3.3 Le modèle gyro-water-bag

Retournons aux équations gyrocinétiques (3.5). Puisque la fonction de distribution $f_\mu(t, \mathbf{r}_\perp, z, v_\parallel)$ dépend d'une seule dimension en vitesse, v_\parallel , une solution de type water-bag peut être considérée [20]. Considérons $2\mathcal{N}$ contours non fermés et ordonnés dans l'espace des phases $(\mathbf{r}, v_\parallel)$ notés $v_{\mu_j}^+$ et $v_{\mu_j}^-$ (où $j = 1, \dots, \mathcal{N}$, $\mu \in \Xi$) tel que $\dots < v_{\mu_{j+1}}^- < v_{\mu_j}^- < \dots < 0 < \dots < v_{\mu_j}^+ < v_{\mu_{j+1}}^+ < \dots$

et des nombres réels constant $\{\mathcal{A}_{\mu j}\}_{j \in [1, \mathcal{N}], \mu \in \Xi}$ que nous appelons hauteurs des bags. Alors on peut définir $f_\mu(t, \mathbf{r}_\perp, z, v_\parallel)$ comme

$$f_\mu(\mathbf{t}, \mathbf{r}_\perp, z, v_\parallel) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mu j} \left[\mathcal{H}(v_\parallel - v_{\mu j}^-(t, \mathbf{r}_\perp, z)) - \mathcal{H}(v_\parallel - v_{\mu j}^+(t, \mathbf{r}_\perp, z)) \right] \quad (3.7)$$

où \mathcal{H} est la fonction d'Heaviside. La fonction (3.7) est une solution faible exacte de l'équation de Vlasov gyrocinétique (3.5) au sens de la théorie des distributions si et seulement si l'ensemble des équations suivantes est vérifiées

$$\partial_t v_{\mu j}^\pm + \mathcal{J}_\mu \mathbf{v}_\mathbf{E} \cdot \nabla_\perp v_{\mu j}^\pm + v_{\mu j}^\pm \partial_z v_{\mu j}^\pm = \frac{q_i}{m_i} \mathcal{J}_\mu E_\parallel, \quad (3.8)$$

pour tout $j \in [1, \mathcal{N}]$ et $\mu \in \Xi$. L'équation de quasi-neutralité s'écrit alors

$$-\nabla_\perp \cdot \left(\frac{n_{i0}}{B\Omega_0} \nabla_\perp \phi \right) + \frac{e\tau n_{i0}}{k_B T_{i0}} (\phi - \lambda \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}}) = 2\pi \sum_{\mu \in \Xi} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mu j} \frac{\Omega_i}{q_i} \mathcal{J}_\mu (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) - n_{i0}. \quad (3.9)$$

Si pour chaque bag j on introduit la densité $n_{\mu j} = (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) \mathcal{A}_{\mu j}$ et la vitesse moyenne $u_{\mu j} = (v_{\mu j}^+ + v_{\mu j}^-)/2$, les équations (3.8) sont équivalentes aux équations de continuité et d'Euler

$$\partial_t n_{\mu j} + \nabla_\perp \cdot (n_{\mu j} \mathcal{J}_\mu \mathbf{v}_\mathbf{E}) + \partial_z (n_{\mu j} u_{\mu j}) = 0$$

$$\partial_t (n_{\mu j} u_{\mu j}) + \nabla_\perp \cdot (n_{\mu j} u_{\mu j} \mathcal{J}_\mu \mathbf{v}_\mathbf{E}) + \partial_z (n_{\mu j} u_{\mu j}^2) + \frac{1}{m_i} \partial_z p_{\mu j} = \frac{q_i}{m_i} n_{\mu j} \mathcal{J}_\mu E_\parallel$$

où la pression partielle prend la forme $p_{\mu j} = m_i n_{\mu j}^3 / (12 \mathcal{A}_{\mu j}^2)$. La connection entre la description fluide et cinétique apparaît clairement dans cette formulation multi-fluides des équations gyro-water-bag.

3.4 Invariants de Liouville et réduction de l'espace des phases

Dans l'équation (3.8), j est rien d'autre qu'une *étiquette* puisque *aucun* opérateur différentiel ne porte sur la variable v_\parallel . Ce que l'on fait, c'est regrouper ensemble dans le même bag j des particules et chaque bag évolue en utilisant l'équation des contours (3.8). Bien sûr les différents bags sont couplés par l'équation de quasi-neutralité (3.9).

Cette opération est une réduction exacte (d'une dimension) de la dimension de l'espace des phases (élimination de la variable de vitesse) au sens où le concept de water-bag utilise l'invariance de Liouville dans l'espace des phases (invariance de la mesure du volume de l'espace des phases) : Le fait que $\mathcal{A}_{\mu j}$ soit constant au cours du temps est une conséquence directe de l'équation de conservation de Vlasov $Df/Dt = 0$. Bien sûr la variable de vitesse éliminée réapparaît à travers les divers bags j ($j = 1, \dots, \mathcal{N}$), et si nous avons besoin d'une description précise d'une fonction de distribution continue un grand nombre \mathcal{N} de bags est nécessaire. D'un autre côté, il n'y a pas mathématiquement de borne inférieure sur \mathcal{N} et d'un point de vue physique plusieurs résultats intéressants peuvent être obtenus avec $\mathcal{N} = 1$ pour les plasmas électrostatiques. Pour les plasmas magnétisés $\mathcal{N} = 2$ ou 3 permet des approches plus analytiques [171, 172].

Au contraire, dans l'espace des phases associé à l'équation de Vlasov, les échanges en vitesse sont décrits par un opérateur différentiel. Du point de vue numérique, cet opérateur doit être approché par des schémas numériques de type différences finies par exemple. Par conséquent, une discrétisation minimum de l'espace des vitesses est nécessaire et nous sommes face au problème usuel de l'échantillonnage. S'il peut être admis que les gradients de la fonction de distribution selon la vitesse v_\parallel restent faibles pour une certaine classe de problèmes, alors une discrétisation grossière peut être acceptable. Cependant, il est bien connu en théorie cinétique

que l'interaction onde-particule n'est pas simple à représenter. En l'occurrence l'existence de forts gradients dans l'espace des vitesses est la signature d'interactions onde-particule intenses et donc le besoin d'une grande résolution numérique dans l'espace des vitesses devient nécessaire, alors qu'avec une description water-bag on peut encore utiliser un petit nombre de contours.

Pour conclure, le modèle gyro-water-bag offre une description exacte de la dynamique du plasma même avec un petit nombre de bags, permettant une approche numérique avec un coût réduit, et apporte le lien entre la description hydrodynamique et cinétique complète donnée par l'équation de Vlasov. Bien sûr cela nécessite une préparation initiale spéciale du plasma (subdivision à la Lebesgue). De plus il n'y a pas de contrainte sur la forme de la fonction de distribution qui peut être très éloignée d'une Maxwellienne. Une fois que la condition initiale a été préparée en utilisant une subdivision à la Lebesgue, les équations gyro-water-bag donnent une solution faible exacte (au sens de la théorie des distributions) de l'équation de Vlasov correspondant à cette condition initiale. Toute condition initiale (continue ou non) qui est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue peut être approchée de manière aussi précise que l'on veut lorsque \mathcal{N} augmente. Par suite, si on a besoin d'une description précise d'une fonction de distribution continue, il est clair qu'un grand \mathcal{N} est nécessaire. Mais même si l'effort numérique est proche de la discrétisation standard de l'espace des vitesses rencontrée dans un code Vlasov (utilisant $2\mathcal{N} + 1$ points de maillage), nous pensons que l'utilisation d'un échantillonnage exact en water-bag donnera de meilleurs résultats que ceux obtenus par l'approximation d'un opérateur différentiel.

3.5 Analyse linéaire

Dans cette section on étudie la stabilité linéaire d'une colonne de plasma magnétisé en linéarisant, autour d'une distribution de bags d'équilibre $v_j^\pm = \pm v_j^\circ(r)$, les équations gyro-water-bag (3.8)-(3.9) dans lesquelles on négligera les effets de polarisation et de gyromoyenne.

3.5.1 Relation de dispersion

On considère la décomposition de la solution en une partie d'équilibre homogène et une perturbation en onde plane :

$$\begin{aligned} v_j^\pm(r, \theta, z, t) &= \pm v_j^\circ(r) + \delta v_j^\pm(r) e^{i(m\theta + k_\parallel z - \omega t)} + \text{c. c.} \\ \phi(r, \theta, z, t) &= \delta\phi(r) e^{i(m\theta + k_\parallel z - \omega t)} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En posant $k_\theta = m/r$ on obtient le système water-bag linéaire

$$(\omega \mp k_\parallel v_j^\circ) \delta v_j^\pm - \left[\frac{q_i k_\parallel}{M_i} \mp \frac{k_\theta}{B} \right] \delta\phi = 0 \quad (3.11)$$

$$Z_i \sum_{j=1}^N A_j (\delta v_j^+ - \delta v_j^-) = \frac{en_{e0}}{T_{e0}} \delta\phi. \quad (3.12)$$

En normalisant ω à $k_\parallel v_{thi}$, v_j° à v_{thi} , k à k_\parallel et ϕ à $q_i \phi / T_i$, le système linéaire (3.11)-(3.12) donne la relation de dispersion $\epsilon(k_\theta, \omega) = 0$ où

$$\epsilon(k_\theta, \omega) = 1 - Z_i^* \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{1 - \omega \Omega_{v_j^\circ}^*}{\omega^2 - v_j^\circ{}^2} \quad (3.13)$$

avec $Z_i^* = Z_i T_{e0} / T_{i0}$.

Dans l'équation précédente (3.13) les paramètres water-bag suivants ont été introduits

- La densité relative du bag j , $\alpha_j = 2\mathcal{A}_j v_j^\circ / n_{i0}$, où $n_{i0}(r)$ est le profil radial de densité ionique.
- La fréquence diamagnétique du bag j , $\Omega_{v_j^\circ}^* = k_\theta k_B T_{i0} / (q_i B) d_r \ln(v_j^\circ)$. Il est intéressant de noter que $\Omega_{v_j^\circ}^*$ est lié à la fréquence diamagnétique $\Omega_{n_{i0}}^*$ par la relation $\sum_{j=1}^N \alpha_j \Omega_{v_j^\circ}^* = \Omega_{n_{i0}}^*$.

3.5.2 Construction d'un équilibre local

Dans ce paragraphe on cherche à déterminer les paramètres water-bag afin de construire un équilibre physiquement pertinent. Une des causes de la turbulence dans les plasmas de tokamak est l'existence de gradients transverses de densité et de température. L'instabilité dite ITG ("Ion Temperature Gradient") est un candidat sérieux pour le développement du transport turbulent. Afin de décrire les modes ITG, on choisit des profils radiaux de température et densité. La fonction de distribution d'équilibre est de la forme

$$f_{eq}(r, v_{\parallel}) = \frac{n_{i0}(r)}{\sqrt{T_{i0}(r)}} \mathcal{F} \left(\frac{v_{\parallel}}{\sqrt{T_{i0}(r)}} \right)$$

où $n_{i0}(r)$ et $T_{i0}(r)$ sont les profils normalisés de densité et température. La fonction \mathcal{F} est une fonction paire, et pour une distribution Maxwellienne on a $\mathcal{F}(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$. La première étape consiste à construire une solution gyro-water-bag d'équilibre locale en $r = r_0$. Pour ce faire on utilise la méthode de l'équivalence des moments suivante. Si on définit pour $\ell = 0, 2, \dots, 2(\mathcal{N} - 1)$, la dérivée radiale du moment d'ordre ℓ de f_{eq} comme

$$\mathcal{M}_r^{\ell}(f_{eq}) = \int_{\mathbb{R}} dv_{\parallel} \partial_r f_{eq} v_{\parallel}^{\ell}$$

et la dérivée radiale du moment d'ordre ℓ du gyro-water-bag comme

$$\mathcal{M}_r^{\ell}(GWB) = \sum_j^{\mathcal{N}} 2\mathcal{A}_j v_j^{\circ \ell} \partial_r v_j^{\circ}$$

alors, en utilisant une intégration par parties, l'égalité $\mathcal{M}_r^{\ell}(f_{eq}) = \mathcal{M}_r^{\ell}(GWB)$ au point $r = r_0$ implique

$$\sum_j^{\mathcal{N}} \alpha_j(r_0) \Omega_{v_j^{\circ}}^*(r_0) (v_j^{\circ}(r_0))^{\ell} = \left(\Omega_{n_{i0}}^*(r_0) + \frac{\ell}{2} \Omega_{T_{i0}}^*(r_0) \right) \left(\sqrt{T_{i0}(r_0)} \right)^{\ell} \mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F}) \quad (3.14)$$

où $\mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F})$ est le moment d'ordre ℓ de la fonction \mathcal{F} , $\alpha_j = 2v_j^{\circ} \mathcal{A}_j / n_{i0}$, $\Omega_{v_j^{\circ}}^*$ mesure le gradient radial local du bag v_j° , $\Omega_{n_{i0}}^*$ et $\Omega_{T_{i0}}^*$ sont les fréquences diamagnétiques définies par

$$\Omega_{v_j^{\circ}}^* = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \frac{d \ln v_j^{\circ}}{dr} = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \kappa_{v_j^{\circ}}$$

et

$$\Omega_{n_{i0}}^* = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \frac{d \ln n_{i0}}{dr} = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \kappa_{n_{i0}}, \quad \Omega_{T_{i0}}^* = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \frac{d \ln T_{i0}}{dr} = \varepsilon_{\omega} \varepsilon_k^{-2} k_{\theta} T_{i0} \kappa_{T_{i0}}.$$

On introduit les inconnues β_j et γ_j , pour $j = 1, \dots, \mathcal{N}$, telles que les contraintes

$$\alpha_j \Omega_{v_j^{\circ}}^* = \gamma_j \Omega_{n_{i0}}^* + \frac{1}{2} \beta_j \Omega_{T_{i0}}^* \quad (3.15)$$

soient satisfaites au point $r = r_0$. Si on substitue (3.15) dans (3.14) alors, les paramètres gyro-water-bag $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ doivent satisfaire le système linéaire suivant au point $r = r_0$

$$\sum_{1 \leq j \leq \mathcal{N}} \alpha_j(r_0) (v_j^{\circ}(r_0))^{\ell} = (\ell + 1) \left(\sqrt{T_{i0}(r_0)} \right)^{\ell} \mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F}) \quad (3.16)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq \mathcal{N}} \beta_j(r_0) (v_j^{\circ}(r_0))^{\ell} = \ell \left(\sqrt{T_{i0}(r_0)} \right)^{\ell} \mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F}) \quad (3.17)$$

$$\sum_{1 \leq j \leq \mathcal{N}} \gamma_j(r_0) (v_j^{\circ}(r_0))^{\ell} = \left(\sqrt{T_{i0}(r_0)} \right)^{\ell} \mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F}) \quad (3.18)$$

Cependant les équations (3.16)-(3.18) conduisent à un système de Vandermonde qui devient mal conditionné pour un grand nombre de bag \mathcal{N} . Une solution plus convenable peut être trouvée pour un grand nombre de bag. On considère une discrétisation régulière de l'axe v_{\parallel} , i.e. $v_j^{\circ}(r_0) = (j - \frac{1}{2})\Delta v$, avec $\Delta v = 2v_{\max}/(2\mathcal{N} - 1)$ et on pose $F_j = f_{eq}(r_0, v_j^{\circ}(r_0) - \frac{\Delta v}{2})$. Si on souhaite que les équations (3.16)-(3.18) soient satisfaites au second ordre en Δv , alors en utilisant la formule de quadrature des trapèzes pour calculer $\mathcal{M}^{\ell}(\mathcal{F})$, on obtient la solution

$$\alpha_j(r_0) = 2A_j \frac{v_j^{\circ}(r_0)}{n_{i0}(r_0)} = 2(F_j - F_{j+1}) \frac{v_j^{\circ}(r_0)}{n_{i0}(r_0)}, \quad \gamma_j(r_0) = \Delta v \frac{F_j + F_{j+1}}{n_{i0}(r_0)}, \quad \beta_j(r_0) = \alpha_j(r_0) - \gamma_j(r_0).$$

3.5.3 Seuil d'instabilité et taux de croissance

La relation de dispersion (3.13) peut maintenant admettre des racines complexes conjuguées correspondant à une instabilité ITG. Pour trouver le seuil d'instabilité on résout les équations $\epsilon(k_{\theta}, \omega) = 0$ et $\partial_{\omega}\epsilon(k_{\theta}, \omega) = 0$. Une approche paramétrique par rapport à ω fournit le seuil d'instabilité linéaire [171, 172]. Il est alors possible de comparer ces courbes avec le résultat analytique donné dans [131] où une distribution Maxwellienne continue a été choisie (Figs. 3.1). Dans le cas de trois bags on obtient deux domaines d'existence des instabilités avec des structures de lobes (Fig. 3.1 (a)). Bien que du point de vue quantitatif il soit difficile de reproduire les caractéristiques de l'instabilité ITG avec si peu de bags, les caractéristiques qualitatives sont bien retrouvées. La précision de modèle est rapidement améliorée en augmentant le nombre de bag. En effet en faisant une étude de la dépendance de taux de croissance linéaire γ par rapport à \mathcal{N} pour A ($\Omega_n = -1.0$, $\Omega_T = -8.0$) (see Fig.3.1 (b)) près du seuil on trouve que γ atteint respectivement 93% (98.5%) du taux continu ($\mathcal{N} \rightarrow \infty$) pour $\mathcal{N} = 5$ ($\mathcal{N} = 10$). Ce résultat suggère qu'une dizaine de bag est suffisante pour bien décrire les instabilités ITG

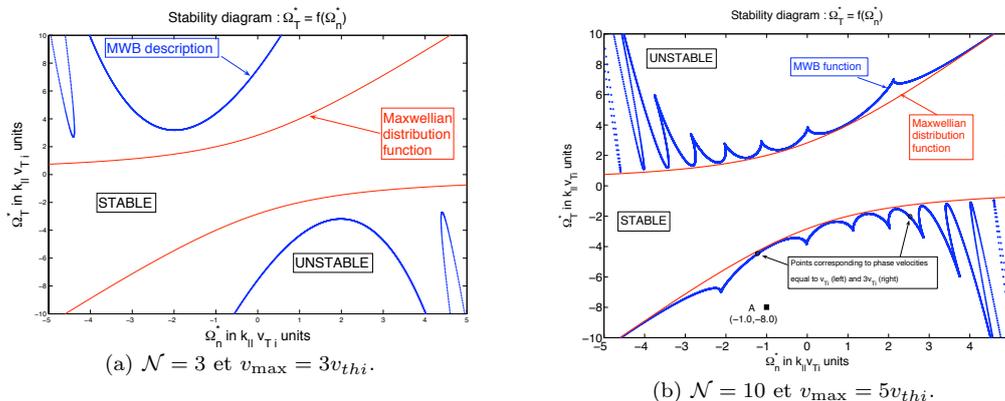


FIGURE 3.1 – Seuil d'instabilité en fonction Ω_T^* et Ω_n^*

3.6 Analyse quasi-linéaire

Dans ce paragraphe le résultat important est la dérivation d'un ensemble d'équations non linéaires de diffusion où les termes sources sont les termes non diagonaux du tenseur des contraintes de Reynolds $\langle \tilde{v}_{r_{E \times B}} \tilde{v}_{\parallel} \rangle$. Ces termes sont proportionnels aux corrélations $\langle \nabla_{\theta} \tilde{\phi} \nabla_{\parallel} \tilde{\phi} \rangle$, qui sont responsables de la régulation du transport radial de l'impulsion parallèle. Ces termes non diffusifs extra-diagonaux contribuent au flux d'impulsion responsable du transport de l'impulsion parallèle vers l'intérieur -pincement d'impulsion- (ou l'extérieur) et des phénomènes de rotations spontanées du plasma conduisant à des profils de rotation piqués près de l'axe. Des études sur le pincement d'impulsion ("momentum pinch") ont été réalisées dans le cadre fluide [112] où les effets d'une vitesse de cisaillement toroïdale sont analysés et dans le cadre cinétique [91] où est réalisée une approche unifiée de la théorie du transport turbulent de la

quantité de mouvement parallèle par les ondes de dérives. En utilisant la condition de résonance, ces équations quasi-linéaires peuvent se réécrire comme un ensemble d'équations de réaction-diffusion couplées qui décrit la compétition entre la diffusion turbulente radiale d'une part et la rétro-action de l'écoulement zonal dans la direction poloïdale et d'un écoulement parallèle cisailé dans la direction azimutale d'autre part, qui peut réduire l'état turbulent du plasma et conduire à l'apparition de barrières internes de transport. La structure mathématique de ces équations est semblable à celle du système de Keller-Segel model [153], largement utilisé en chimiotactisme pour décrire le transport collectif (diffusion, concentration et aggrégation) de cellules - d'un organisme biologique multi-cellulaires- attirées par des substances chimiques auto-émises. Dans ce cadre les bags jouent le rôle de la densité des différents groupes de cellules et le flux zonal joue le rôle de la substance chimique auto-émise.

Afin de réaliser l'analyse quasi-linéaire [194, 98, 99] des équations (3.8)-(3.9) chaque quantité physique $f \in \{v_{\mu j}^{\pm}, \phi\}$ est décomposée en une partie lentement variable uniforme en (θ, z) : f_0 ; et une perturbation fluctuante au premier ordre δf tel que $f(t, r, \theta, z) = f_0(t, r) + \delta f(t, r, \theta, z)$, où δf est décomposée en séries de Fourier $\delta f(t, r, \theta, z) = \sum_{\nu \neq 0} f_{\nu}(t, r) \exp(i(k_{\parallel}z + m\theta))$ avec $k_{\parallel} = 2\pi n/L_z$, $k_{\theta} = m/r$, $\nu = (m, n)$ et $\mathbf{0} = (0, 0)$. Notons que $\langle \delta f \rangle_{\theta, z} = 0$, $\langle f_0 \rangle_{\theta, z} = f_0$, où $\langle \cdot \rangle_{\theta, z}$ désigne la moyenne en (θ, z) , et $f_{-\nu} = \bar{f}_{\nu}$. Cherchons d'abord les équations de la partie lentement variable $(\{v_{\mu j 0}^{\pm}\}_{j \in [1, \mathcal{N}], \mu \in \Lambda}, \phi_0)$. Si on moyenne les équations (3.8) en (θ, z) , on obtient

$$\partial_t v_{\mu j 0}^{\pm} + \frac{i}{rB} \partial_r \sum_{\nu \neq \mathbf{0}} r k_{\theta} J_{0\mu\nu} \bar{\phi}_{\nu} v_{\mu j \nu}^{\pm} = 0, \quad (3.19)$$

où on a utilisé la notation $J_{0\mu\nu} = J_0(k_{\perp} \sqrt{2\mu/(\Omega_i q_i)})$. Si on soustrait (3.19) à (3.8) et qu'on néglige les termes d'ordre deux en la perturbation, après intégration en temps on obtient

$$v_{\mu j \nu}^{\pm}(t) = v_{\mu j \nu}^{\pm}(0) \exp\left(-i \int_0^t \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm}(s) ds\right) - i \int_0^t ds J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}(t-s) \lambda_{\mu j 0}^{\pm}(t-s) \exp\left(-i \int_{t-s}^t \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm}(\tau) d\tau\right) \quad (3.20)$$

où $\mathbf{k} = (k_{\parallel}, k_{\theta})^T$, $\mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm} = (v_{\mu j 0}^{\pm}, \partial_r \phi_0/B)^T$, et $\lambda_{\mu j 0}^{\pm} = (q_i/m_i)k_{\parallel} - k_{\theta} \partial_r v_{\mu j 0}^{\pm}/B$. Notons que l'équation (3.28) pour ϕ_0 et l'équation pour les perturbations ϕ_{ν} sont obtenues directement à partir de l'équation de quasi-neutralité (3.9). On cherche alors une solution de la forme (ansatz WKB) $f_{\nu}(t, r) = \tilde{f}_{\nu}(t, r) \exp(-i\omega_{\nu}t)$ où la phase $\omega_{\nu} = \omega_{\mathbf{k}}$ est un nombre réel tel que $\omega_{-\nu} = \omega_{-\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}} = -\omega_{\nu}$, et où l'enveloppe $\tilde{f}_{\nu}(t)$ est une fonction réelle lentement variable sur des échelles de temps $\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$. Ici $\gamma_{\mathbf{k}}$ est le taux d'instabilité. Il donne l'échelle de temps d'évolution de ϕ_{ν} alors que τ_{dif} est l'échelle de temps d'évolution de $(\{v_{\mu j 0}^{\pm}\}_{j \in [1, \mathcal{N}], \mu \in \Lambda}, \phi_0)$. Puisque l'échelle de temps de l'enveloppe est plus grande que celle des phases donnée par $\tau_{fo} \sim \omega_{\mathbf{k}}^{-1}$, on a $|\gamma_{\mathbf{k}}/\omega_{\mathbf{k}}| \ll 1$. Pour plus de simplicité on supprimera par la suite la notation avec des tildes. Le premier terme du second membre de (3.20), le transport libre, décroît rapidement à cause du mélange de phase dans la somme sur j ou l'intégration en v_{\parallel} sur une échelle de temps $\tau_d \sim (k_{\parallel} \bar{v})^{-1}$ où \bar{v} représente la vitesse thermique parallèle. En supposant que $t \gg \tau_d$ on peut négliger le terme lié à la condition initiale dans (3.20) et substituer le résultat dans l'équation sur ϕ_{ν} pour obtenir

$$-\chi_0 \partial_r \left(\frac{\partial_r \phi_{\nu}}{\chi_0} \right) + K \phi_{\nu} = -iL \int_0^t C(t, s) \phi_{\nu}(t-s) ds \quad (3.21)$$

où $K = m^2/r^2 + \kappa$, $\kappa = eB\Omega_i/(k_B T_e)$, $L = 2\pi\Omega_i^2 B/(q_i n_{i0})$, $\chi_0 = 1/(rn_{i0})$, et

$$C(t, s) = \sum_{\substack{\mu \in \Lambda \\ j \leq \mathcal{N}}} \mathcal{A}_{\mu j} J_{0\mu\nu}^2 \left\{ \lambda_{\mu j 0}^+(t-s) \exp\left(i \int_{t-s}^t \Omega_{\mu j 0}^+(\tau) d\tau\right) - \lambda_{\mu j 0}^-(t-s) \exp\left(i \int_{t-s}^t \Omega_{\mu j 0}^-(\tau) d\tau\right) \right\}$$

avec $\Omega_{\mu j 0}^{\pm}(\tau) = \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm}(\tau)$ la fréquence Doppler. Une fois encore, grâce à l'argument du mélange de phase, la somme sur j conduit à la décroissance de $C(t, s)$ par rapport à s sur une échelle de temps τ_d . Si ce temps est petit comparativement à τ_{dif} et $\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$ on peut faire un développement limité en temps de $\lambda_{\mu j 0}^{\pm}$, $\mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm}$, et ϕ_{ν} dans (3.21). Si on néglige tous les termes du second ordre en temps et en supposant $\tau_{dif} \gg \gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$, une intégration en temps donne

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{\nu} L \sum_{\mu, j} \mathcal{A}_{\mu j} J_{0\mu\nu}^2 \partial_{\omega} \left(\lambda_{\mu j 0}^+ \delta_{+\mu j}^+ - \lambda_{\mu j 0}^- \delta_{+\mu j}^- \right) + \chi_0 \partial_r \left(\frac{\partial_r \phi_{\nu}}{\chi_0} \right) \\ - \left\{ K + iL \sum_{\mu, j} \mathcal{A}_{\mu j} J_{0\mu\nu}^2 \left(\lambda_{\mu j 0}^+ \delta_{+\mu j}^+ - \lambda_{\mu j 0}^- \delta_{+\mu j}^- \right) \right\} \phi_{\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

où on a utilisé les notations $\dot{\phi}_{\nu} = d\phi_{\nu}/dt$, $\delta_{+\mu j}^{\pm} = \delta_{+}(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm})$ et $\delta_{+}(\cdot) = \pi\delta(\cdot) + i\text{v.p.}(1/\cdot)$. La partie imaginaire de (3.22) donne le taux d'instabilité $\gamma_{\mathbf{k}} = \dot{\phi}_{\nu}/\phi_{\nu} = \pi\Xi(\delta)/\partial_{\omega}\Xi(\mathcal{P})$ où $\mathcal{P}(\cdot) = \text{p.v.}(1/\cdot)$ désigne la valeur principale, et $\Xi(f) = \sum_{\mu, j} \mathcal{A}_{\mu j} J_{0\mu\nu}^2 \{ \lambda_{\mu j 0}^+ f(\Omega_{\mu j 0}^+) - \lambda_{\mu j 0}^- f(\Omega_{\mu j 0}^-) \}$ avec f appartenant à l'espace des distributions de Schwartz. A l'ordre le plus bas en $\dot{\phi}_{\nu}$, la partie réelle de (3.22) donne la relation de dispersion $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = 0$ où $\epsilon(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) = -\chi_0 \partial_r (\partial_r \phi_{\nu} / \chi_0) + (K - L\Xi(\mathcal{P}))\phi_{\nu}$. On poursuit l'analyse en introduisant $\delta^2 v_{\mu j}^{\pm}$, la perturbation d'ordre deux de $v_{\mu j}^{\pm}$, telle que $\langle \delta^2 v_{\mu j}^{\pm} \rangle_{\theta, z} \neq 0$. On injecte la décomposition $v_{\mu j}^{\pm} = v_{\mu j 0}^{\pm} + \delta v_{\mu j}^{\pm} + \delta^2 v_{\mu j}^{\pm}$ dans les équations (3.19)-(3.20) et on utilise l'ansatz WKB. Le premier terme du second membre de (3.20), le transport libre décroît rapidement dans (3.19) à cause du mélange de phase lors de l'intégration en \mathbf{k} , sur une échelle de temps $\tau_{fs} \sim |\Delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm})|^{-1}$, pour peu que la condition $|\Delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm})|^{-1} \ll \gamma_{\mathbf{k}}^{-1}, \tau_{dif}$ soit satisfaite. En négligeant le terme du transport libre, après une moyenne en (θ, z) , et en négligeant tous les termes d'ordre trois en la perturbation on obtient

$$\partial_t v_{\mu j 0}^{\pm} + \partial_t \langle \delta^2 v_{\mu j}^{\pm} \rangle_{\theta, z} + \frac{1}{r} \partial_r \left(\mathcal{J}_{\mu j}^{\pm} \right) = 0, \quad (3.23)$$

où

$$\mathcal{J}_{\mu j}^{\pm}(t) = r \int_0^t \sum_{\nu \neq 0} \lambda_{\mu j 0}^{\pm}(t-s) \frac{k_{\theta}}{B} J_{0\mu\nu}^2 \phi_{\nu}(t-s) \bar{\phi}_{\nu}(t) \exp \left(i \int_{t-s}^t \Omega_{\mu j 0}^{\pm}(\tau) d\tau \right) ds. \quad (3.24)$$

A cause du mélange de phase, la somme sur les modes ν ou l'intégration en \mathbf{k} dans l'expression (3.24) conduit à sa décroissance par rapport à la variable s sur une échelle de temps τ_{fs} , ce qui justifie l'extension à l'infini du domaine d'intégration de la variable s dans l'équation (3.24). De plus si on suppose $\tau_{fs} \ll \gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$ les développements limités en temps des parties lentement variables sont justifiés. En négligeant les termes du second ordre en temps et en supposant $\tau_{dif} \gg \gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$, l'équation (3.24) devient

$$\mathcal{J}_{\mu j}^{\pm} = \sum_{\nu \in \mathbb{D}} \frac{rk_{\theta}}{B} \lambda_{\mu j 0}^{\pm} \left(2\pi\delta(\Omega_{\mu j 0}^{\pm}) - \partial_{\omega} \mathcal{P}(\Omega_{\mu j 0}^{\pm}) \frac{d}{dt} \right) |J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}|^2 \quad (3.25)$$

où $\mathbb{D} = \{ \nu = (m, n) \mid m > 0, n \neq 0 \}$. On substitue maintenant l'expression (3.25) dans (3.23) et on associe respectivement le premier terme du second membre de (3.25) à $\partial_t v_{\mu j 0}^{\pm}$ et le second terme du second membre de (3.25) à $\partial_t \langle \delta^2 v_{\mu j}^{\pm} \rangle_{\theta, z}$. Par conséquent on obtient un ensemble d'équations non linéaires de diffusion

$$\frac{\partial v_{\mu j 0}^{\pm}}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathcal{D}_{\mu j}^{\pm} \frac{\partial v_{\mu j 0}^{\pm}}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Pi_{\mu j, r, \parallel}^{\pm} \right) \quad (3.26)$$

avec le coefficient positif de diffusion

$$\mathcal{D}_{\mu j}^{\pm} = 2\pi \rho_s c_s \sum_{\nu \in \mathbb{D}} Z_i^2 \rho_s^2 k_{\theta}^2 \left| \frac{e J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}}{T_e} \right|^2 \Omega_i \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu j 0}^{\pm}),$$

et la composante parallèle du tenseur des contraintes de Reynolds

$$\Pi_{\mu_j, r, \parallel}^{\pm} = 2\pi \sum_{\nu \in \mathbb{D}} Z_i^2 c_s^2 \rho_s^2 k_{\theta} k_{\parallel} \left| \frac{e J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}}{T_e} \right|^2 \Omega_i \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu_j 0}^{\pm})$$

L'équation (3.26) a le même sens physique que l'équation (4) dérivée dans [91], dans le cadre cinétique Vlasovien. Le coefficient de diffusion $\mathcal{D}_{\mu_j}^{\pm}$ rend compte de la diffusion radiale de chaque bag due à la dérive stochastique $E \times B$. Les termes non diffusifs et non diagonaux $\Pi_{\mu_j, r, \parallel}^{\pm}$ représentent les corrélations entre la diffusion radiale et l'accélération parallèle qui sont liées à la génération d'écoulements parallèles cisailés radialement. Ces termes non diagonaux contribuent aux flux turbulents d'impulsion, et peuvent conduire à des mouvements de convection vers l'intérieur grâce à un transfert d'impulsion entre les particules résonantes et les ondes. Cet écoulement parallèle, cisailé radialement, peut entraîner des phénomènes de mise en rotation spontanée du plasma et de bifurcation des impulsions des particules dont la compétition avec la dynamique des barrières de transport internes a donné lieu à des recherches intenses [112, 91]. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un champ électrique cisailé ni la géométrie toroïdale pour que ces contributions existent. En utilisant la condition de résonance $\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu_j 0}^{\pm} = 0$, les équations (3.26) peuvent se réécrire comme des équations de Fokker-Planck

$$\frac{\partial v_{\mu_j 0}^{\pm}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mathcal{F}_{\mu_j}^{\pm} v_{\mu_j 0}^{\pm} + r \mathcal{D}_{\mu_j}^{\pm} \frac{\partial v_{\mu_j 0}^{\pm}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r Q_{\mu_j}^{\pm} \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right) \quad (3.27)$$

avec le coefficient de friction,

$$\mathcal{F}_{\mu_j}^{\pm} = \sum_{\nu \in \mathbb{D}} \mathcal{G}_{\nu} (1 + \mathcal{I}_{\nu}) \left| \frac{e J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}}{T_e} \right|^2 \Omega_i \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu_j 0}^{\pm}),$$

et le terme de source

$$Q_{\mu_j}^{\pm} = \sum_{\nu \in \mathbb{D}} \mathcal{G}_{\nu} \mathcal{I}_{\nu} \frac{k_{\theta}}{k_{\parallel} B} \left| \frac{e J_{0\mu\nu} \phi_{\nu}}{T_e} \right|^2 \Omega_i \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{\mu_j 0}^{\pm}),$$

où $\mathcal{G}_{\nu} = -2\pi Z_i^2 c_s^2 \rho_s^2 k_{\parallel}^2 k_{\theta} \omega_{\mathbf{k}}^{-1}$ et $\mathcal{I}_{\nu} = \omega_{\mathbf{k}}^{-1} k_{\theta} \partial_r \phi_0 / B$. Les équations des bags (3.27) sont couplées à l'équation du flux zonal

$$-\chi_0 \partial_r \left(\frac{\partial_r \phi_0}{\chi_0} \right) + \kappa (1 - \lambda) \phi_0 = L \left(\sum_{\substack{\mu \in \Lambda \\ j \leq N}} \mathcal{A}_{\mu j} (v_{\mu j 0}^+ - v_{\mu j 0}^-) - \frac{q_i}{2\pi \Omega_i} n_{i0} \right). \quad (3.28)$$

L'existence du terme source dû à Q_j^{\pm} dans (3.27) couple les équations de la dynamique des bags avec le flux zonal donné de manière auto-cohérente par l'équation (3.28). Par conséquent, le système (3.27)-(3.28) est un système de réaction-diffusion décrivant la diffusion turbulente faible (cascade d'énergie directe) qui entre en compétition avec la rétro-action du flux zonal (cascade d'énergie inverse). Dans un tel plasma la rétro-action des flux de cisaillement sur la turbulence induite par les gradients de pression est un mécanisme central qui régit l'état turbulent et le transport dans le plasma, avec en particulier la formation possible de barrières de transport. La somme sur les bags dans le terme source de (3.28) permet de retrouver le caractère cinétique (interaction onde-particule résonante non linéaire) à partir des équations fluides (3.27). En effet la superposition des bags permet de rendre compte des résonances Landau dans l'espace des phases par le processus de mélange de phase des fréquences réelles comme pour le traitement des oscillations électroniques d'un plasma par Van Kampen-Case [212, 58]. De plus ce modèle a des propriétés assez universelles pour les processus de réaction-diffusion. En effet dans le cas d'un bag avec $v^+ = v^-$ (température nulle) les équations (3.27)-(3.28) ont une structure mathématique semblable aux modèles de type Keller-Segel [153], qui sont très utilisés pour le chimiotactisme, décrivant le mouvement collectif (diffusion, aggrégation) d'organisme multi-cellulaires sous l'action de substances chimiques auto-émises.

On peut maintenant intégrer les équations $\langle \delta^2 v_{\mu j}^\pm \rangle_{\theta,z}$ afin de retrouver les lois de conservation classiques (densité, impulsion et énergie) au second ordre en la perturbation. Une intégration en temps du terme $\langle \delta^2 v_{\mu j}^\pm \rangle_{\theta,z}$ donne

$$\langle \delta^2 v_{\mu j}^\pm \rangle_{\theta,z} = \frac{1}{r} \partial_r \sum_{\nu \in \mathbb{D}} \frac{r k_\theta}{B} \lambda_{\mu j 0}^\pm |J_{0\nu} \phi_\nu|^2 \partial_{\omega_k} \mathcal{P}(\Omega_{\mu j 0}^\pm). \quad (3.29)$$

Comme on va le voir ci-dessous le terme $\langle \delta^2 v_{\mu j}^\pm \rangle_{\theta,z}$ permet de retrouver ces lois de conservation. A partir de l'équation (3.27), après intégration sur le cylindre on obtient la conservation de la densité totale

$$\frac{dn_0}{dt} = \frac{d}{dt} \left(4\pi^2 L_z \frac{\Omega_i}{q_i} \sum_{\mu,j} \mathcal{A}_{\mu j} \int r dr (v_{\mu j 0}^+ - v_{\mu j 0}^-) \right) = 0.$$

Définissons $\mathcal{K}_{0\ell}$ comme l'impulsion des particules non résonantes pour $\ell = 2$ et comme l'énergie des particules non résonantes pour $\ell = 3$ par

$$\mathcal{K}_{0\ell} = 4\pi^2 B L_z \frac{1}{\ell} \int r dr \sum_{\mu,j} \mathcal{A}_{\mu j} \left(v_{\mu j 0}^{+\ell} - v_{\mu j 0}^{-\ell} \right).$$

Définissons $\mathcal{K}_{2\ell}$ comme la contribution des particules résonantes à l'impulsion des ondes pour $\ell = 1$ et comme la contribution des particules résonantes à l'énergie des ondes pour $\ell = 2$ par

$$\mathcal{K}_{2\ell} = 4\pi^2 B L_z \int r dr \sum_{\mu,j} \mathcal{A}_{\mu j} \left(v_{\mu j 0}^{+\ell} \langle \delta^2 v_{\mu j}^+ \rangle_{\theta,z} - v_{\mu j 0}^{-\ell} \langle \delta^2 v_{\mu j}^- \rangle_{\theta,z} \right).$$

Finalement on définit l'énergie totale des ondes \mathcal{E} par

$$\mathcal{E} = 4\pi^2 B L_z \int r dr \sum_{\nu \in \mathbb{D}} 2 \left(\frac{k_\theta}{B k_\parallel} \right)^2 \frac{\partial_r^2 \phi_0}{L} \phi_\nu \omega \partial_\omega \epsilon.$$

En utilisant les équations (3.27), (3.29) et la relation de dispersion (3.22), on obtient $\dot{\mathcal{K}}_{02} + \dot{\mathcal{K}}_{21} = 0$ et $\dot{\mathcal{K}}_{03} + \dot{\mathcal{E}} = \dot{\mathcal{K}}_{03} + \dot{\mathcal{K}}_{22} + \dot{\mathcal{E}}_\phi = 0$, ce qui signifie que l'impulsion et l'énergie sont respectivement conservées au second ordre en la perturbation. Le terme $\mathcal{E}_\phi = \mathcal{E} - \mathcal{K}_{22}$ représente l'énergie potentielle électrique.

3.7 Le problème de Cauchy

Dans ce paragraphe on étudie l'existence et l'unicité de solutions classiques pour le système (3.8)-(3.9). En général la densité n_{i0} et la température T_{i0} apparaissant dans les équations (3.9) sont des fonctions régulières du rayon r . Pour simplifier la preuve, sans perte de généralité on peut supposer que la densité n_{i0} et la température T_{i0} sont uniformes et que $\lambda = 0$ dans l'équation (3.9). Puisque l'opérateur de gyromoyenne \mathcal{J}_μ dans les équations (3.8)-(3.9) a un effet régularisant (régularisation elliptique) dans le plan transverse au même titre que la dérive de polarisation (Laplacien dans l'équation (3.9)), on peut le supprimer pour faire l'analyse mathématique du système. Une fois adimensionnées, les équations (3.8)-(3.9) s'écrivent dans \mathbb{R}^3 comme

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\pm - \nabla_\perp^\pm \phi \cdot \nabla_\perp v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \phi &= 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{j0}^\pm(\cdot), \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ -\Delta_\perp \phi + \phi &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - 1, \end{aligned} \quad (3.31)$$

On a alors le résultat

Théorème 10 (*Solution classique locale*). On suppose $v_{0j}^\pm \in H^s(\mathbb{R}^3)$ avec $s > n/2 + 1$, $n = 3$ et \mathcal{A}_j des nombres réels positifs pour $1 \leq j \leq \mathcal{N}$. Alors pour tout \mathcal{N} , il existe un temps $T > 0$ qui dépend seulement de $\|v_{0j}^\pm\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}$, \mathcal{N} , $A = \max_{j \leq \mathcal{N}} |\mathcal{A}_j|$, tel que le système (3.30)-(3.31) a une solution unique

$$v_j^\pm \in L^\infty(0, T; H^s(\mathbb{R}^3)) \cap \text{Lip}(0, T; H^{s-1}(\mathbb{R}^3)), \quad j = 1 \dots \mathcal{N}$$

Preuve. La preuve de ce théorème se trouve dans [42]. Afin de démontrer l'existence et l'unicité de solutions classiques pour le système (3.30)-(3.31) on décompose la dynamique globale en une dynamique transverse

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\pm - \nabla_\perp^\perp \phi \cdot \nabla_\perp v_j^\pm &= 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot), \quad j = 1 \dots \mathcal{N}, \\ -\Delta_\perp \phi + \phi &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - 1, \end{aligned}$$

et longitudinale

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\pm + v_j^\pm \partial_z v_j^\pm + \partial_z \phi &= 0, \quad v_j^\pm(0, \cdot) = v_{0j}^\pm(\cdot), \quad j = 1 \dots \mathcal{N}, \\ -\Delta_\perp \phi + \phi &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_j^+ - v_j^-) - 1. \end{aligned}$$

Pour chaque système on prouve l'existence et l'unicité de solutions classiques et on obtient des estimations a priori sur ces solutions [42, 208, 209]. L'idée de la preuve consiste alors à construire une suite de solutions du système global à partir de celles du système transverse et longitudinal grâce à une méthode de splitting en temps d'ordre un. Grâce aux estimations a priori d'énergie associées au système transverse et longitudinal, on montre qu'il existe une limite unique de cette suite qui vérifie le système global. La principale difficulté vient de la perte de dérivée en z sur le potentiel électrique ϕ dans l'équation (3.31), ce qui entraîne une perte de régularité dans la direction z . Pour surmonter cette difficulté on réécrit la dynamique longitudinale comme un système de lois de conservation hyperbolique. ■

3.8 Normalisation et lois de conservation

Les schémas numériques développés ci-après sont basés sur des équations adimensionnées. Dans notre cas, la température T_{i0} et T_{e0} sont normalisés à une température caractéristique \bar{T}_0 qui est définie par $T_{i0}(r_0)/\bar{T}_0 = 1$. La direction longitudinale est normalisée à k_\parallel et la direction transverse à k_\perp . La vitesse est normalisée à la vitesse thermique des ions $v_{thi} = \sqrt{T_{i0}/m_i}$ et le temps à $\omega^{-1} = (k_\parallel v_{thi})^{-1}$. Le potentiel électrique est normalisé à une fluctuation caractéristique $\bar{\phi}$. De plus on définit les petits paramètres sans dimensions suivants

$$\varepsilon_k = \frac{k_\parallel}{k_\perp}, \quad \varepsilon_\omega = \frac{\omega}{\Omega_0}, \quad \varepsilon_\delta = \frac{e\bar{\phi}}{k_B \bar{T}_0}, \quad \varepsilon_{\nabla_{eq}} = \frac{\rho_i}{L_{\nabla_{eq}}}, \quad \varepsilon_\perp = \rho_i k_\perp \quad (3.32)$$

où $L_{\nabla_{eq}}$ est la longueur caractéristique des gradients à l'équilibre des moments fluides. L'approximation gyrocinétique est obtenue lorsque $\varepsilon_k \sim \varepsilon_\omega \sim \varepsilon_\delta \sim \varepsilon_{\nabla_{eq}} \sim \varepsilon \sim 10^{-3}$ et $\varepsilon_\perp \sim 1$. Pour les grandes longueurs d'onde $\varepsilon_\perp \ll 1$ on obtient l'approximation centre guide. En utilisant l'adimensionnement (3.32) les équations (3.8) et (3.9) deviennent

$$\partial_t v_{\mu j}^\pm + \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i (\mathbf{e}_z \times \nabla \mathcal{J}_\mu \phi) \cdot \nabla_\perp v_{\mu j}^\pm + v_{\mu j}^\pm \partial_z v_{\mu j}^\pm = Z_i \varepsilon_\delta \mathcal{J}_\mu E_\parallel \quad (3.33)$$

et

$$-\varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i \nabla_\perp \cdot (n_{i0} \nabla_\perp \phi) + \frac{\varepsilon_\delta \tau n_{i0}}{T_{i0}} (\phi - \lambda \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}}) = 2\pi \sum_{\mu \in \Xi} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mu j} \mathcal{J}_\mu (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) - n_{i0}. \quad (3.34)$$

Le système (3.33)-(3.34) conservent le nombre total de particules

$$\sum_{\mu j} \mathcal{A}_{\mu j} \int d\mathbf{r} (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-),$$

et l'énergie totale

$$\sum_{\mu j} \mathcal{A}_{\mu j} \int d\mathbf{r} \left(\mu (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) + \frac{v_{\mu j}^{+3}}{6} - \frac{v_{\mu j}^{-3}}{6} \right) + \int d\mathbf{r} \left(2\pi \sum_{\mu j} \mathcal{A}_{\mu j} \mathcal{J}_{\mu} (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) - n_{i0} \right) \phi. \quad (3.35)$$

Finalement on définit le flux de chaleur à la position radiale r et au temps t

$$Q(t, r) = \sum_{\mu j} \mathcal{A}_{\mu j} \int \frac{d\theta}{2\pi} \frac{dz}{L_z} \left(\mu (v_{\mu j}^+ - v_{\mu j}^-) + \frac{v_{\mu j}^{+3}}{6} - \frac{v_{\mu j}^{-3}}{6} \right) (\mathbf{e}_z \times \nabla \mathcal{J}_{\mu} \phi) \cdot \mathbf{e}_r.$$

3.9 Dérivation d'un modèle gyro-water-bag auto-cohérent

Dans cette partie on dérive le système gyro-water-bag quasi-linéaire auto-cohérent dont on cherche à approcher les solutions. Ce modèle sera très utile pour faire des comparaisons avec le modèle non linéaire. En utilisant le développement

$$f(t, r, \theta, z) = \frac{1}{2} \left\{ f_0(t, r, z) + \sum_{m>0} f_m(t, r, z) e^{i\theta m} \right\} + \text{c.c.} \quad (3.36)$$

où f_0 est un nombre réel et f_m est un nombre complexe, et en supposant la limite $k_{\perp} \rho \rightarrow 0$ ($\mathcal{J}_{\mu} \rightarrow 1$), les équations (3.8) deviennent

$$\partial_t v_{j0}^{\pm} + \partial_z \left(\frac{v_{j0}^{\pm 2}}{2} + \phi_0 \right) + \frac{1}{2rB} \sum_m m \partial_r (V_{jm}^{\pm} \times \Phi_m) + \frac{1}{4} \sum_m \partial_z (|V_{jm}^{\pm}|^2) = 0 \quad (3.37)$$

$$\partial_t V_{jm}^{\pm} + \frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{H}_m) V_{jm}^{\pm} - \frac{1}{r} \partial_r (r \mathcal{K}_{jm}^{\pm}) \Phi_m + \partial_z (v_{j0}^{\pm} V_{jm}^{\pm} + \Phi_m) + \mathcal{F} = 0 \quad (3.38)$$

où

$$\mathcal{H}_m = \frac{m}{Br} \phi_0 \mathcal{I}, \quad \mathcal{K}_{jm}^{\pm} = \frac{m}{Br} v_{j0}^{\pm} \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{jm}^{\pm} = \begin{pmatrix} \Re v_{jm}^{\pm} \\ \Im v_{jm}^{\pm} \end{pmatrix}, \quad \Phi_m = \begin{pmatrix} \Re \phi_m \\ \Im \phi_m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{F}_2 \end{pmatrix}.$$

avec

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2Br} \sum_{\ell} m \left(\partial_r \Phi_{\ell} \widehat{\times} V_{jm-\ell}^{\pm} \right) + m \left(\partial_r \Phi_{m+\ell} \times V_{j\ell}^{\pm} \right) + m \left(V_{jm+\ell}^{\pm} \times \partial_r \Phi_{\ell} \right) +$$

$$\ell \partial_r \left(V_{jm+\ell}^{\pm} \times \Phi_{\ell} \right) - (\ell + m) \partial_r \left(\Phi_{m+\ell} \times V_{j\ell}^{\pm} \right) - \ell \partial_r \left(\Phi_{\ell} \widehat{\times} V_{jm-\ell}^{\pm} \right) +$$

$$\sum_{\ell} \frac{1}{4} \partial_z \left(V_{j\ell}^{\pm} \cdot V_{jm-\ell}^{\pm} \right) + \frac{1}{2} \partial_z \left(V_{j\ell}^{\pm} \cdot V_{jm+\ell}^{\pm} \right) \quad (3.39)$$

et

$$\mathcal{F}_2 = \frac{1}{2Br} \sum_{\ell} m \left(\partial_r \Phi_{\ell} \cdot V_{jm-\ell}^{\pm} \right) + m \left(\partial_r \Phi_{m+\ell} \cdot V_{j\ell}^{\pm} \right) + m \left(V_{jm+\ell}^{\pm} \cdot \partial_r \Phi_{\ell} \right) +$$

$$\ell \partial_r \left(V_{jm+\ell}^{\pm} \cdot \Phi_{\ell} \right) - (\ell + m) \partial_r \left(\Phi_{m+\ell} \cdot V_{j\ell}^{\pm} \right) - \ell \partial_r \left(\Phi_{\ell} \cdot V_{jm-\ell}^{\pm} \right) +$$

$$\sum_{\ell} \frac{1}{4} \partial_z \left(V_{j\ell}^{\pm} \widehat{\times} V_{jm-\ell}^{\pm} \right) + \frac{1}{2} \partial_z \left(V_{j\ell}^{\pm} \times V_{jm+\ell}^{\pm} \right) \quad (3.40)$$

Dans (3.39) et (3.40) on a utilisé les notations $U \hat{\cdot} V = U_1 V_1 - U_2 V_2$, $U \widehat{\times} V = U_1 V_2 + U_2 V_1$, où U et V sont deux vecteurs de dimension deux. Les termes quadratiques en V_{jm}^\pm , qui conduisent au couplage de modes et à l'existence d'un régime de saturation seront négligés dans (3.38) et conservés dans les équations (3.37). En d'autres termes, le terme \mathcal{F} est supprimé dans (3.38). En utilisant les paramètres sans dimensions (3.32) les équations (3.37)-(3.38), deviennent

$$\partial_t v_{j0}^\pm + \partial_z \left(\frac{v_{j0}^{\pm 2}}{2} + Z_i \varepsilon_\delta \phi_0 \right) + \sum_{m>0} \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i \frac{m}{2r} \partial_r (V_{jm}^\pm \times \Phi_m) + \sum_{m>0} \partial_z \left(\frac{|V_{jm}^\pm|^2}{4} \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\partial_t V_{jm}^\pm + \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i \frac{1}{r} \left\{ \partial_r (r \mathcal{H}_m) V_{jm}^\pm - \partial_r (r \mathcal{K}_{jm}^\pm) \Phi_m \right\} + \partial_z (v_{j0}^\pm V_{jm}^\pm + Z_i \varepsilon_\delta \Phi_m) = 0 \quad (3.42)$$

En substituant le développement (3.36) dans l'équation (3.9) et en utilisant (3.32) on obtient les équations adimensionnées

$$-\varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i \frac{1}{r} \partial_r (r n_{i0} \partial_r \phi_0) + \frac{\varepsilon_\delta \tau n_{i0}}{T_{i0}} (\phi_0 - \lambda \langle \phi_0 \rangle_{\mathcal{M}}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (v_{j0}^+ - v_{j0}^-) - n_{i0}, \quad (3.43)$$

et

$$-\varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i \frac{1}{r} \partial_r (r n_{i0} \partial_r \Phi_m) + \left(\varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i \frac{m^2}{r^2} + \frac{\varepsilon_\delta \tau n_{i0}}{T_{i0}} \right) \Phi_m = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j (V_{jm}^+ - V_{jm}^-). \quad (3.44)$$

Finalement on cherchera à résoudre le système (3.41)-(3.44).

3.10 Approximation numérique

Cette section est dédiée à la discrétisation numérique du modèle non linéaire (3.33)-(3.34), et du modèle quasi-linéaire (3.41)-(3.44). Bien que ces deux modèles soient différents ils doivent donner les mêmes résultats (taux de croissance des instabilités ITG) dans le régime linéaire. Le modèle quasi-linéaire (3.41)-(3.44) est résolu par une méthode de Runge-Kutta Galerkin-discontinu alors qu'une méthode de Runge-Kutta semi-Lagrangienne en arrière est développée pour discrétiser le système non linéaire (3.41)-(3.44).

3.10.1 Approximation numérique du système non linéaire

Dans cette partie nous présentons la méthode numérique pour résoudre les équations (3.33)-(3.34), où seul un invariant adiabatique $\mu = \mu_0$ est considéré. Par soucis de clarté on supprime l'indice μ . Le schéma est basé sur une méthode de Runge-Kutta semi-Lagrangienne. Si on introduit les courbes caractéristiques $\mathbf{r}_j^\pm(t) = (r_j^\pm(t), \theta_j^\pm(t), z_j^\pm(t))$ associées aux opérateurs de transport

$$\partial_t + \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i (\mathbf{e}_z \times \nabla \mathcal{J} \phi) \cdot \nabla_\perp + v_{\mu j}^\pm \partial_z$$

alors pour $j = 1, \dots, \mathcal{N}$, les équations (3.33) s'écrivent

$$\frac{d}{dt} v_j^\pm(t, \mathbf{r}_j^\pm(t)) = Z_i \varepsilon_\delta \mathcal{J} E_\parallel(t, \mathbf{r}_j^\pm(t)), \quad v_j^\pm(0) = v_j^{\pm 0} \quad (3.45)$$

où

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r}_j^\pm(t) = F(t, \mathbf{r}_j^\pm(t), \mathcal{J} \phi(t), v_j^\pm(t)) \quad (3.46)$$

avec

$$F(t, \mathbf{r}, \mathcal{J}\phi, u) = \begin{pmatrix} -\frac{\eta}{r} \partial_\theta \mathcal{J}\phi(t, \mathbf{r}) \\ \frac{\eta}{r} \partial_r \mathcal{J}\phi(t, \mathbf{r}) \\ u(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \eta = Z_i \varepsilon_\delta \varepsilon_k^{-2} \varepsilon_\omega.$$

Soit Ω le domaine de calcul et \mathcal{M}_h une partition de Ω d'éléments K tel que $K = K_{i_r + \frac{1}{2}, i_\theta + \frac{1}{2}, i_z + \frac{1}{2}} = \{(r, \theta, z) \mid |r - r_{i_r + \frac{1}{2}}| \leq \Delta r/2, |\theta - \theta_{i_\theta + \frac{1}{2}}| \leq \Delta \theta/2, |z - z_{i_z + \frac{1}{2}}| \leq \Delta z/2\}$ où $\Delta r = L_r/N_r$, $\Delta \theta = 2\pi/N_\theta$ et $\Delta z = L_z/N_z$, sont les pas de discrétisation en espace. On cherche maintenant une solution approchée $(v_{h,j}^\pm, \phi_h) \in (\mathcal{C}^2 \cap \mathfrak{B}_{4,h}(\Omega))^{\otimes 3}$, pour chaque valeur de la variable temporelle et pour $j = 1, \dots, \mathcal{N}$, où

$$\mathfrak{B}_{4,h}(\Omega) = \mathcal{S}_{4,\Delta r}^c(\{s_i\}_{i=0\dots N_r}, s'_0, s'_1) \otimes \mathcal{S}_{4,\Delta \theta}^p(\{s_i\}_{i=0\dots N_\theta}) \otimes \mathcal{S}_{4,\Delta z}^p(\{s_i\}_{i=0\dots N_z})$$

avec

$$\mathcal{S}_{4,\Delta x}^p(\{s_i\}_{i=0\dots N_x}) = \left\{ \begin{array}{l} s(x) \in \mathcal{C}^2([x_0, x_{N_x}]), \quad s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3, \quad \forall i \in [0, N_x - 1]; \\ D^4 s(x) = 0, \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad \forall i \in [0, N_x - 1]; \\ s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_{N_x}), \quad k = 0\dots 2, \quad s(x_i) = s_i \quad \forall i \in [0, N_x] \end{array} \right\},$$

et

$$\mathcal{S}_{4,\Delta x}^c(\{s_i\}_{i=0\dots N_x}, s'_0, s'_1) = \left\{ \begin{array}{l} s(x) \in \mathcal{C}^2([x_0, x_{N_x}]), \quad s_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3, \quad \forall i \in [0, N_x - 1]; \\ s(x) = \arg \min_{\substack{f \in \mathcal{C}^2 \\ f \neq 0}} \left(\int_{x_0}^{x_{N_x}} |D^2 f|^2 \right); \\ s'(x_0) = s'_0, \quad s'(x_{N_x}) = s'_1, \quad s(x_i) = s_i \quad \forall i \in [1, N_x - 1] \end{array} \right\}.$$

Par ailleurs la spline cubique à trois dimensions s_f qui interpole f aux points $\{r_{i_r}, \theta_{i_\theta}, z_{i_z}\}_{i_r=0\dots N_r, i_\theta=0\dots N_\theta, i_z=0\dots N_z}$ avec conditions aux limites peut être écrite sous la forme

$$s_f(r, \theta, z) = \sum_{i_r=-1}^{N_r+1} \sum_{i_\theta=-1}^{N_\theta+1} \sum_{i_z=-1}^{N_z+1} c_{i_r, i_\theta, i_z}(f) B^4(r/\Delta r - i_r) B^4(\theta/\Delta \theta - i_\theta) B^4(z/\Delta z - i_z)$$

où l'ensemble des coefficients $\{c_{i_r, i_\theta, i_z}(f)\}_{i_r=-1\dots N_r+1, i_\theta=-1\dots N_\theta+1, i_z=-1\dots N_z+1}$ est solution d'un système linéaire déterminé par les contraintes d'interpolation et les conditions aux limites, et où $B^4 = B * B * B * B$ avec $B(x) = 1$ si $x \in [-1/2, 1/2]$ et zéro ailleurs. Après une discrétisation spatiale le système différentiel ordinaire (3.45)-(3.46) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_{h,j}^\pm(t, \mathbf{r}_{h,j}^\pm(t)) &= Z_i \varepsilon_\delta \mathcal{J}^h E_{h\parallel}(t, \mathbf{r}_{h,j}^\pm(t)), \quad v_{h,j}^\pm(0) = v_{h,j}^{\pm 0}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{h,j}^\pm(t) &= F_h(t, \mathbf{r}_{h,j}^\pm(t), \mathcal{J}^h \phi_h(t), v_{h,j}^\pm(t)) \end{aligned} \quad (3.47)$$

où $\mathbf{r}_{h,j}^\pm(t)$, \mathcal{J}^h et F_h sont respectivement des approximations numériques des courbes caractéristiques exactes $\mathbf{r}_j^\pm(t)$, de l'opérateur de gyromoyenne \mathcal{J} (3.4) et du champ de force F . Soit $\Delta t = T/N_T$ le pas de discrétisation en temps, alors les équations différentielles ordinaires (3.47) sont approchées en temps par la méthode de Runge-Kutta d'ordre deux en temps suivante. Pour tout $n \in [0, N_T - 1]$, $j \in [0, \mathcal{N}]$, $\mathbf{k} = (r_{i_r}, \theta_{i_\theta}, z_{i_z}) \in \Sigma = [0, N_r] \times [0, N_\theta] \times [0, N_z]$ on impose que

Étape 1 :

$$\begin{aligned} v_{h,j}^{\pm n+1/2}(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2}) &= v_{h,j}^\pm(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n}) + Z_i \varepsilon_\delta \frac{\Delta t}{2} \mathcal{J}^h E_{h\parallel}^n(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n}) \\ \mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2} &= \mathbf{r}_{h,j}^{\pm n} + \frac{\Delta t}{2} F_h^n(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n}, \mathcal{J}^h \phi_h^n, v_{h,j}^{\pm n}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

où $\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2} = \mathbf{r}_{\mathbf{k}}$, et

Etape 2 :

$$\begin{aligned} v_{h,j}^{\pm n+1}(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n}) &= v_{h,j}^{\pm}(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n}) + Z_i \varepsilon_\delta \Delta t \mathcal{J}^h E_{h\parallel}^{n+1/2}(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2}) \\ \mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1} &= \mathbf{r}_{h,j}^{\pm n} + \Delta t F_h^{n+1/2}(\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2}, \mathcal{J}^h \phi_h^{n+1/2}, v_{h,j}^{\pm n+1/2}) \end{aligned} \quad (3.49)$$

où $\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1} = \mathbf{r}_k$.

Si on pose $\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n} = \mathbf{r}_k - \mathbf{d}_{h,j}^{\pm n}$ dans l'équation (3.48) on est amené à résoudre le point fixe de l'équation

$$\mathbf{d}_{h,j}^{\pm n} = \frac{\Delta t}{2} F_h^n(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_{h,j}^{\pm n}, \mathcal{J}^h \phi_h^n, v_{h,j}^{\pm n}). \quad (3.50)$$

Si on pose $\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n} = \mathbf{r}_k - 2\mathbf{d}_{h,j}^{\pm n}$ dans l'équation (3.49) et que l'on fait l'approximation $\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n+1/2} = (\mathbf{r}_{h,j}^{\pm n} + \mathbf{r}_k)/2$, encore valable au second ordre en temps, on est conduit à résoudre le point fixe de l'équation

$$\mathbf{d}_{h,j}^{\pm n} = \frac{\Delta t}{2} F_h^{n+1/2}(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_{h,j}^{\pm n}, \mathcal{J}^h \phi_h^{n+1/2}, v_{h,j}^{\pm n+1/2}). \quad (3.51)$$

Finalement (3.50) et (3.51) sont des problèmes de point fixe de la forme

$$\mathbf{d}_k = \frac{\Delta t}{2} F_h(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}). \quad (3.52)$$

Le point fixe de l'équation (3.52) peut être résolu itérativement par un algorithme de Newton. Si on pose la fonction vectorielle $\mathfrak{R}(\mathbf{d}_k) = \mathbf{d}_k - \frac{\Delta t}{2} F_h(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm})$ une itération de Newton est donnée par

$$\mathbf{d}_k^{\ell+1} = \mathbf{d}_k^\ell - J_{\mathfrak{R}}^{-1}(\mathbf{d}_k^\ell) \mathfrak{R}(\mathbf{d}_k^\ell) \quad (3.53)$$

où $J_{\mathfrak{R}}$ est la matrice Jacobienne de \mathfrak{R} . Même si cet algorithme donne des résultats précis cette méthode demande l'interpolation des champs $(\phi_h, v_{h,j}^{\pm})$ et de leurs dérivées en des points arbitraires de l'espace. Une solution plus économique est d'utiliser un développement de Taylor en temps dans le schéma (3.53). En utilisant le développement de Taylor au second ordre suivant de la matrice Jacobienne $J_{\mathfrak{R}}$,

$$J_{\mathfrak{R}}^{-1}(\mathbf{r}_k) = \left(I + \frac{\Delta t}{2} J_{F_h}(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) \right)^{-1} = I - \frac{\Delta t}{2} J_{F_h}(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

dans l'équation (3.53) on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k^{\ell+1} &= \frac{\Delta t}{2} F_h(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k^\ell, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} J_{F_h}(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k^\ell, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) \left(\mathbf{d}_k^\ell - \frac{\Delta t}{2} F_h(\mathbf{r}_k - \mathbf{d}_k^\ell, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Si on impose la valeur initiale \mathbf{d}_k^0 à zéro, alors on obtient un schéma plus simple

$$\mathbf{d}_k^* = \frac{\Delta t}{2} F_h(\mathbf{r}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) - \frac{\Delta t^2}{4} J_{F_h}(\mathbf{r}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) F_h(\mathbf{r}_k, \mathcal{J}^h \phi_h, v_{h,j}^{\pm}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.54)$$

qui a l'avantage de nécessiter que l'évaluation de F_h et de ses premières dérivées aux noeuds du maillage. Si on choisit \mathbf{d}_k^0 nul dans l'algorithme de Newton (3.53) et s'il converge en une itération, alors il est équivalent à la méthode (3.54).

Maintenant il reste à résoudre l'équation de quasi-neutralité (3.34) et l'opérateur de gyro-moyenne (3.4) qui sont résolus grâce à un développement en séries de Fourier dans les directions périodiques et grâce à un schéma aux différences finies dans la direction radiale. Si $\phi_{mn}(r)$ représente le mode poloïdal-toroïdal (m, n) la transformée de Fourier de l'équation (3.9) devient

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta}{rn_{i0}(r)} \partial_r (rn_{i0}(r) \partial_r \phi_{mn}) + \left(\zeta \frac{m^2}{r^2} + \frac{\varepsilon_\delta \tau}{T_{i0}} (1 - \lambda \delta_{m,0} \delta_{n,0}) \right) \phi_{mn} \\ = \rho_{mn} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_j ((\mathcal{J} v_j^+)_{mn} - (\mathcal{J} v_j^-)_{mn}) - n_{i0}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec $\zeta = \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i$. Si on demande que le champ électrique soit défini de manière unique sur l'axe $r_{\min} = 0$ alors la condition aux limites pour le potentiel électrique doit satisfaire $\partial_r \phi_{0n}|_{r_{\min}=0} = 0, \forall n$ et $\phi_{mn}|_{r_{\min}=0} = 0, \forall m \neq 0, \forall n$. Si $r_{\min} \neq 0$ on impose $\phi_{mn}|_{r_{\min}} = 0, \forall(m, n)$. Sur le bord sortant le plasma est considéré comme un conducteur, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de composante tangentielle du champ électrique et donc $\phi_{mn}|_{r_{\max}} = 0, \forall(m, n) \neq 0$. De plus on impose $\phi_{00}|_{r_{\max}} = 0$. En utilisant un schéma aux différences finies d'ordre deux l'équation (3.55) s'écrit comme un système linéaire tridiagonal de dimension $(N_r - 1) \times (N_r - 1)$

$$\begin{pmatrix} \varpi a + \alpha_1 & \beta_1^+ & & & \\ \beta_2^- & \alpha_2 & \beta_2^+ & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \beta_{N_r-2}^- & \alpha_{N_r-2} & \beta_{N_r-2}^+ \\ & & & \beta_{N_r-1}^- & \alpha_{N_r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{mn,1} \\ \phi_{mn,2} \\ \vdots \\ \phi_{mn,N_r-2} \\ \phi_{mn,N_r-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{mn,1} \\ \rho_{mn,2} \\ \vdots \\ \rho_{mn,N_r-2} \\ \rho_{mn,N_r-1} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \zeta \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{m^2}{r_i^2} \right) + \frac{\varepsilon_\delta \tau}{T_{i0}} (1 - \lambda \delta_{m,0} \delta_{n,0}) \\ \beta_i^\pm &= -\frac{\zeta}{\Delta r^2} \pm \frac{\zeta}{2\Delta r} \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{n_{i0}(r_i)} \frac{dn_{i0}}{dr}(r_i) \right) \\ a &= -\frac{\zeta}{\Delta r^2} + \frac{\zeta}{2\Delta r} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{n_{i0}(r_1)} \frac{dn_{i0}}{dr}(r_1) \right) \end{aligned}$$

avec $\varpi = 1$ si $r_{\min} = 0$ et $\varpi = 0$ si $r_{\min} \neq 0$. Dans l'espace de Fourier l'opérateur de gyromoyenne (3.4) devient

$$-\frac{\rho^2}{4} \partial_r^2 \langle \phi_{mn} \rangle + \left(1 - \frac{\rho^2}{4} \frac{m^2}{r^2} \right) \langle \phi_{mn} \rangle = \phi_{mn} \quad (3.56)$$

où $\langle \phi_{mn} \rangle$ représente le mode poloïdal-toroïdal (m, n) du potentiel gyromoyenné. En utilisant un schéma aux différences finies et en appliquant les mêmes conditions aux limites utilisées pour l'équation de quasi-neutralité l'équation (3.56) conduit à résoudre le système linéaire tridiagonal

$$\begin{pmatrix} \varpi \varrho + \gamma_1 & \varrho & & & \\ \varrho & \gamma_2 & \varrho & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \varrho & \gamma_{N_r-2} & \varrho \\ & & & \varrho & \gamma_{N_r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \phi_{mn,1} \rangle \\ \langle \phi_{mn,2} \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_{mn,N_r-2} \rangle \\ \langle \phi_{mn,N_r-1} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{mn,1} \\ \phi_{mn,2} \\ \vdots \\ \phi_{mn,N_r-2} \\ \phi_{mn,N_r-1} \end{pmatrix}$$

où

$$\gamma_i = 1 + \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{m^2}{r_i^2} \right), \quad \text{et} \quad \varrho = -\frac{\rho^2}{4\Delta r^2}.$$

Chaque système tridiagonal est résolu par une méthode de factorisation LU.

3.10.2 Approximation numérique du système quasi-linéaire

Cette partie est dévolue à l'approximation du système d'équations (3.41)-(3.44). Pour ce faire, on utilise une méthode de Galerkin discontinu conjuguée à un schéma de Runge-Kutta [68]. On décrit d'abord la méthode pour les équations de transport (3.41)-(3.42). Soit Ω le domaine de calcul et \mathcal{M}_h une partition de Ω d'élément K tel que $\cup_{K \in \mathcal{M}_h} K = \Omega, K \cap Q = \emptyset, K, Q \in \mathcal{M}_h, K \neq Q$. On pose $h = \max_{K \in \mathcal{M}_h} h_K$ où h_K est le diamètre extérieur de l'élément fini K . La frontière de K est notée par ∂K , n_K est la normale unitaire extérieure à ∂K , et $f(\cdot) = (\cdot)^2/2$. Nous utilisons les notations $V_{jm}^\pm = (\Re V_{jm}^\pm, \Im V_{jm}^\pm)^T = (V_{jm}^{\pm 1}, V_{jm}^{\pm 2})^T$, $\gamma_\alpha = (-1)^\alpha$, et $\beta = \text{mod}(\alpha, 2) + 1$. La première étape est d'écrire les équations (3.41)-(3.44)

sous une forme variationnelle (faible) convenable sur chaque élément K de la partition \mathcal{M}_h , i.e. on multiplie (3.41)-(3.44) par une fonction test et on intègre sur l'élément K en utilisant une formule de Green pour faire apparaître l'intégrale sur le bord de ∂K . Maintenant on cherche une solution approchée $(v_{h,j0}^\pm, \Re V_{h,jm}^\pm, \Im V_{h,jm}^\pm, \phi_{h,0}, \Re \Phi_{h,m}, \Im \Phi_{h,m})$ dont la restriction à l'élément K de la partition \mathcal{M}_h appartient, pour chaque valeur de la variable temporelle, à l'espace local de dimension fini, $\mathcal{P}(K)$, typiquement un espace de polynôme. On pose alors

$$\mathcal{P}_h(\Omega) = \{ \psi \mid \psi|_K \in \mathcal{P}(K), \forall K \in \mathcal{M}_h \}.$$

On détermine alors l'approximation $(v_{h,j0}^\pm, \Re V_{h,jm}^\pm, \Im V_{h,jm}^\pm, \phi_{h,0}, \Re \Phi_{h,m}, \Im \Phi_{h,m})|_K \in \otimes^6 \mathcal{P}(K)$ pour $t > 0$, sur chaque élément de K de \mathcal{M}_h en imposant que pour tout $\varphi_h \in \mathcal{P}(K)$, pour tout $j = 1 \dots \mathcal{N}$, pour $\alpha \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_K dK v_{h,j0}^\pm \varphi_h - \frac{1}{2} \int_K dK (v_{h,j0}^\pm)^2 \partial_z \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle f n_{K,z} \rangle (v_{h,j0}^\pm) \varphi_h + Z_i \varepsilon_\delta \int_K dK \varphi_h E_{h,0z} \\ & - \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i \sum_{m>0} m \left(\int_K dK V_{h,jm}^\pm \times \Phi_{h,m} \partial_r \left(\frac{\varphi_h}{2r} \right) - \int_{\partial K} d\Gamma \langle V_{h,jm}^\pm \times \Phi_{h,m} n_{K,r} \rangle \frac{\varphi_h}{2r} \right) \\ & - \sum_{m>0} \left(\frac{1}{4} \int_K dK |V_{h,jm}^\pm|^2 \partial_z \varphi_h - \frac{1}{2} \int_{\partial K} d\Gamma (\langle f n_{K,z} \rangle (\Re V_{h,jm}^\pm) + \langle f n_{K,z} \rangle (\Im V_{h,jm}^\pm)) \varphi_h \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

avec

$$\int_K dK \varphi_h E_{h,0z} = - \int_K dK \phi_{h,0} \partial_z \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle \phi_{h,0} n_{K,z} \rangle \varphi_h, \quad (3.58)$$

et

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_K dK V_{h,jm}^{\pm\alpha} \varphi_h + \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega \varepsilon_k^{-2} Z_i \int_K dK \frac{\gamma_\alpha m}{r} (E_{h,0r} V_{h,jm}^{\pm\beta} - \partial_r v_{h,j0}^\pm \Phi_{h,m}^\beta) \varphi_h \\ & - \int_K dK v_{h,j0}^\pm V_{h,jm}^{\pm\alpha} \partial_z \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle v_{h,j0}^\pm V_{h,jm}^{\pm\alpha} n_{K,z} \rangle \varphi_h + Z_i \varepsilon_\delta \int_K dK E_{h,mz}^\alpha \varphi_h = 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

où

$$\int_K dK \varphi_h E_{h,0r} = - \int_K dK \phi_{h,0} \partial_r \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle \phi_{h,0} n_{K,r} \rangle \varphi, \quad (3.60)$$

$$\int_K dK \partial_r v_{h,j0}^\pm \varphi_h = - \int_K dK v_{h,j0}^\pm \partial_r \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,r} \rangle \varphi_h, \quad (3.61)$$

$$\int_K dK \varphi_h E_{h,mz}^\alpha = - \int_K dK \Phi_{h,m}^\alpha \partial_z \varphi_h + \int_{\partial K} d\Gamma \langle \Phi_{h,m}^\alpha n_{K,z} \rangle \varphi_h. \quad (3.62)$$

Dans les équations (3.57)-(3.62) on a remplacé les termes de flux sur le bord de la cellule K , par des flux numériques parce que les termes relatifs à la frontière de K ne sont pas bien définis puisque les inconnues sont discontinues par construction. Maintenant il reste à définir ces flux numériques. Pour deux éléments adjacents K^ℓ et K^r (r représente la cellule de droite et ℓ celle de gauche) de \mathcal{M}_h et un point P de leur frontière commune sur laquelle le vecteur n_{K^σ} , $\sigma \in \{r, \ell\}$ est défini, on pose $\varphi_h^\sigma(P) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_h(P - \epsilon n_{K^\sigma})$ et on appelle cette valeur la trace intérieure de φ_h . Alors le flux numérique au point P est une fonction des traces à droite et à gauche des inconnues considérées. Par exemple

$$\langle f n_{K^\ell, z} \rangle (v_{h,j0}^\pm)(P) = \langle f n_{K^\ell, z} \rangle (v_{h,j0}^{\pm, \ell}(P), v_{h,j0}^{\pm, r}(P)).$$

De plus le flux numérique doit être consistant avec la non linéarité $f n_{K^\ell, z}$, ce qui signifie que l'on doit avoir $\langle f n_{K^\ell, z} \rangle (v, v) = f(v) n_{K^\ell, z}$. Afin d'obtenir un schéma monotone dans le cas d'une reconstruction constante par morceau le flux doit être conservatif c'est à dire

$$\langle f n_{K^\ell, z} \rangle (v_{h,j0}^{\pm, \ell}(P), v_{h,j0}^{\pm, r}(P)) + \langle f n_{K^r, z} \rangle (v_{h,j0}^{\pm, r}(P), v_{h,j0}^{\pm, \ell}(P)) = 0$$

et l'application $v \mapsto \langle f n_{K^\ell, z} \rangle(v, \cdot)$ doit être croissante. Il existe plusieurs exemples de flux numériques satisfaisant ces propriétés : les flux de Godunov, Engquist-Osher, et de Lax-Friedrichs [68]. Pour les flux numériques $\langle V_{h,jm}^\pm \times \Phi_{h,m} n_{K,r} \rangle$, $\langle f n_{K,z} \rangle (\Re V_{h,jm}^\pm)$, et $\langle f n_{K,z} \rangle (\Im V_{h,jm}^\pm)$ on choisit un flux moyen. Pour les flux $\langle \phi_{h,0} n_{K,z} \rangle$, $\langle \phi_{h,0} n_{K,r} \rangle$, $\langle v_{h,j0}^\pm n_{K,r} \rangle$ et $\langle \Phi_{h,m}^\alpha n_{K,z} \rangle$ on peut choisir un flux moyen, à gauche ou à droite. Finalement pour le flux numérique $\langle v_{h,j0}^\pm V_{h,jm}^{\pm\alpha} n_{K,z} \rangle$ (coefficients de transport discontinus) on peut choisir deux flux upwind différents

$$\langle v_{h,j0}^\pm V_{h,jm}^{\pm\alpha} n_{K,z} \rangle = \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,z} \rangle^\Delta V_{h,jm}^{\pm\alpha, \ell} + \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,z} \rangle^\nabla V_{h,jm}^{\pm\alpha, r}$$

où

$$\begin{aligned} - \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,z} \rangle^\Delta &= (v_{h,j0}^\pm)^\Delta |n_{K,z}|, & \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,z} \rangle^\nabla &= (v_{h,j0}^\pm)^\nabla |n_{K,z}| \\ \text{ou} \end{aligned}$$

$$- \langle v_{h,j0}^\pm n_{K,z} \rangle = |n_{K,z}| \left((1-\eta) v_{h,j0}^{\pm, \ell} + \eta v_{h,j0}^{\pm, r} \right), \quad \eta \in [0, 1]$$

avec la notation $z^\Delta = \max(z, 0)$ et $z^\nabla = \min(z, 0)$.

Si on introduit X_h , une inconnue générique telle que

$$X_h \in \Lambda = \left\{ \left\{ v_{h,j0}^\pm \right\}_{j \in [1, \mathcal{N}]}, \left\{ V_{h,jm}^\pm \right\}_{j \in [1, \mathcal{N}], m > 0} \right\}.$$

alors, après la discrétisation en espace, pour tout $K \in \mathcal{M}_h$ et $X_h \in \Lambda$, on obtient les équations différentielles ordinaires

$$\mathfrak{M} \frac{d}{dt} X_{h|_K} = \mathcal{L}_{K, X_h} \left(\left\{ v_{h,j0|_{K'}}^\pm, V_{h,jm|_{K'}}^\pm, \phi_{h,0|_{K'}}, \Phi_{h,m|_{K'}} \mid \overline{K'} \cap \overline{K} \in \partial K \right\} \right).$$

Dans le cas général la matrice de masse locale \mathfrak{M} de petite taille est facilement inversible. Si on choisit des polynômes orthogonaux la matrice \mathfrak{M} est diagonale. Ici on choisit des polynômes de Legendre comme base orthogonale de L^2 . De plus on choisit un élément rectangulaire : $K = K_{pq} = \{(r, z) \mid |r_p - r| \leq \Delta r/2, |z_q - z| \leq \Delta z/2\}$, où Δr et Δz sont les pas de discrétisation.

On doit alors résoudre les équations différentielles ordinaires

$$\frac{d}{dt} X_h = L_{h, X_h} \left(v_{h,j0}^\pm, V_{h,jm}^\pm, \phi_{h,0}, \Phi_{h,m} \right), \quad \forall X_h \in \Lambda \quad (3.63)$$

Afin de résoudre (3.63) on peut utiliser une méthode de Runge-Kutta [127]. Pour des raisons de stabilité numérique on doit choisir un schéma de Runge-Kutta à $k+1$ pas et d'ordre $k+1$, pour une discrétisation GD utilisant des polynômes de degré k si on ne veut pas que la condition CFL soit trop petite. Comme on a choisi des polynômes de degré deux, on choisit un schéma de Runge-Kutta d'ordre trois [127] :

$$\begin{aligned} X_h(t_1) &= X_h(t^n) + \Delta t L_{h, X_h} \left(v_{h,j0}^\pm(t^n), V_{h,jm}^\pm(t^n), \phi_{h,0}(t^n), \Phi_{h,m}(t^n) \right) \\ X_h(t_2) &= \frac{3}{4} X_h(t^n) + \frac{1}{4} X_h(t_1) + \frac{1}{4} \Delta t L_{h, X_h} \left(v_{h,j0}^\pm(t_1), V_{h,jm}^\pm(t_1), \phi_{h,0}(t_1), \Phi_{h,m}(t_1) \right) \\ X_h(t^{n+1}) &= \frac{1}{3} X_h(t^n) + \frac{2}{3} X_h(t_2) + \frac{2}{3} \Delta t L_{h, X_h} \left(v_{h,j0}^\pm(t_2), V_{h,jm}^\pm(t_2), \phi_{h,0}(t_2), \Phi_{h,m}(t_2) \right) \end{aligned}$$

$\forall X_h \in \Lambda$ avec $t^n = n\Delta T$, $\Delta t = T/N_T$, et t_1 et t_2 des temps entre t^n et t^{n+1} .

Pour la discrétisation de la condition initiale on prend $(v_{h,j0}^\pm(t=0), V_{h,jm}^\pm(t=0))$ comme étant la projection L^2 de $(v_j^\pm(t=0), V_{jm}^\pm(t=0))$ sur $\otimes^3 \mathcal{P}(K)$.

Il reste maintenant à résoudre les équations (3.43)-(3.44). Si on pose $\lambda = 0$, les équations (3.43) et (3.44) prennent la forme générale

$$\partial_r \sigma + \nu \phi = \rho \quad \text{on } \Omega \quad (3.64)$$

$$\mu^{-1} \sigma = -\partial_r \phi \quad \text{on } \Omega \quad (3.65)$$

$$\phi|_{r=r_{\min}} = 0 \quad \text{or} \quad \partial_r \phi|_{r=r_{\min}} = 0, \quad \text{and} \quad \phi|_{r=r_{\max}} = 0, \quad \forall z \in \Omega_z \quad (3.66)$$

$$\phi(r, z) = \phi(r, z + L_z), \quad \forall r \in \Omega_r \quad (3.67)$$

où $\Omega = \Omega_r \times \Omega_z = [r_{\min}, r_{\max}] \times [0, L_z]$. Le terme ρ/r représente le terme source de (3.43) ou (3.44), $\mu(r) = \varepsilon_\delta \varepsilon_k^{-2} \varepsilon_\omega^2 Z_i r n_{i0}(r)$, et on définit $\nu(r) = \varepsilon_\delta \tau r n_{i0}(r)/T_{i0}(r)$ pour l'équation (3.43) ou $\nu(r) = r \varepsilon_\delta \varepsilon_\omega^2 \varepsilon_k^{-2} Z_i m^2/r^2 + \varepsilon_\delta \tau r n_{i0}(r)/T_{i0}(r)$ pour l'équation (3.44). En utilisant une formule de Green on peut réécrire le problème (3.64)-(3.67) sous une forme variationnelle (faible) convenable pour son approximation numérique qui consiste à trouver $\sigma_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ et $\phi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ tels que pour $\varphi_h, \psi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega)$ et pour tout $K \in \mathcal{M}_h$

$$\int_K \mu^{-1} \sigma_h \varphi_h dK = \int_K \phi_h \partial_r \varphi_h dK - \int_{\partial K} \widehat{\phi}_K \varphi_h n_{K^\ell, r} d\Gamma \quad (3.68)$$

$$\int_K \sigma_h \partial_r \psi_h dK = \int_{\partial K} \widehat{\sigma}_K n_{K^\ell, r} \psi_h d\Gamma + \int_K \nu \phi_h \psi_h dK - \int_K \rho_h \psi_h dK \quad (3.69)$$

où σ_h et ϕ_h sont des approximations de $\sigma = -\mu \partial_r \phi$ et ϕ respectivement, et ρ_h représente l'approximation de ρ dans $\mathcal{P}_h(\Omega)$. Les flux numériques $\widehat{\sigma}_K$ et $\widehat{\phi}_K$ sont des approximations de $\sigma = -\mu \partial_r \phi$ et ϕ respectivement, sur le bord de K . Si on pose n la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, \mathcal{E}_h° l'ensemble des arêtes intérieures de \mathcal{M}_h , \mathcal{E}_h^∂ l'ensemble des arêtes appartenant à la frontière de \mathcal{M}_h et si on utilise les notations $[[\varphi_h]] = \varphi_h^\dagger n_{K^\ell, r} + \varphi_h^\ell n_{K^r, r}$ et $\{\varphi_h\} = \frac{1}{2}(\varphi_h^\dagger + \varphi_h^\ell)$, alors pour $\varphi, \psi \in \prod_{K \in \mathcal{M}_h} L^2(\partial K)$ on a

$$\sum_{K \in \mathcal{M}_h} \int_{\partial K} \psi_{K^\ell} \varphi_{K^\ell} n_{K^\ell, r} d\Gamma = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} ([[\psi]][\varphi] + [[\varphi]][\psi]) d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} \psi \varphi n_r d\Gamma. \quad (3.70)$$

Si on prend $\varphi_h = \sigma_h$ dans (3.68), $\psi_h = \phi_h$ dans (3.69), en sommant sur les éléments K et en utilisant (3.70) on obtient

$$\mathcal{R}_h + \int_\Omega \mu^{-1} |\sigma_h|^2 dK + \int_\Omega \nu |\phi_h|^2 dK = \int_\Omega \rho_h \phi_h dK \quad (3.71)$$

où

$$\mathcal{R}_h = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} (\{\widehat{\sigma}_h - \sigma_h\} [[\phi_h]] + \{\widehat{\phi}_h - \phi_h\} [[\sigma_h]]) d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial} (\phi_h (\widehat{\sigma}_h - \sigma_h) + \widehat{\phi}_h \sigma_h) n_r d\Gamma. \quad (3.72)$$

Maintenant nous choisissons les flux numériques comme il suit

$$\widehat{\sigma}_h = \{\sigma_h\} + \alpha_{11} [[\phi_h]] + \alpha_{12} [[\sigma_h]], \quad (3.73)$$

$$\widehat{\phi}_h = \{\phi_h\} - \alpha_{11} [[\phi_h]] + \alpha_{22} [[\sigma_h]] \quad \text{on } \mathcal{E}_h^\circ \quad (3.74)$$

$$\widehat{\sigma}_h = \sigma_h^\ell + \alpha_{11} \phi_h^\ell n_r, \quad \widehat{\phi}_h = 0, \quad \text{on } \mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_D, \quad (3.75)$$

$$\widehat{\sigma}_h = 0, \quad \widehat{\phi}_h = \phi_h^\ell + \alpha_{22} \sigma_h^\ell n_r, \quad \text{on } \mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_N, \quad (3.76)$$

où $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} \geq 0$, $\alpha_{12} \in \mathbb{R}$, et Γ_D (resp. Γ_N) représentent le sous ensemble des éléments de \mathcal{E}_h^∂ où les conditions de Dirichlet (resp. Neumann) sont appliquées. Si on injecte (3.74)-(3.76) dans (3.72) alors

$$\mathcal{R}_h = \int_{\mathcal{E}_h^\circ} (\alpha_{11} [[\phi_h]]^2 + \alpha_{22} [[\sigma_h]]^2) d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_D} \alpha_{11} |\phi_h|^2 d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_N} \alpha_{22} |\sigma_h|^2 d\Gamma \geq 0.$$

Si on pose $\rho_h = 0$ dans (3.71) alors on obtient $[[\phi_h]]_{\mathcal{E}_h^\circ} = 0$, $\phi_h|_{\Gamma_D} = 0$, $\sigma_h = 0$ et $\phi_h = 0$ puisque $\mu, \nu, \alpha_{11} > 0$ et $\alpha_{22} \geq 0$. Alors $\phi_h = 0$ sur $\overline{\Omega}$ et la solution approchée ϕ_h est bien définie. Maintenant que la méthode fournit une solution unique approchée, calculons-la. Si on prend l'équation (3.68), en sommant sur les cellules K , en utilisant (3.70) on obtient

$$a(\sigma_h, \varphi_h) - b(\phi_h, \varphi_h) = 0, \quad \forall \varphi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega) \quad (3.77)$$

où les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ sont

$$a(u, v) = \int_\Omega \mu^{-1} uv dK + \alpha_{22} \left(\int_{\mathcal{E}_h^\circ} [[u]][[v]] d\Gamma + \int_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_N} (un_r)(vn_r) \right)$$

$$b(w, u) = \int_\Omega \partial_r uw dK + \int_{\mathcal{E}_h^\circ} [[u]](\alpha_{12} [[w]] - \{w\}) d\Gamma - \int_{\mathcal{E}_h^\partial \cap \Gamma_N} un_r w.$$

Une intégration par parties donne

$$-\int_K \sigma_h \partial_r \varphi_h dK = -\int_{\partial K} \sigma_h n_{K^\ell, r} \varphi_h d\Gamma + \int_K \partial_r \sigma_h \varphi_h dK. \quad (3.78)$$

Si on ajoute (3.69) à (3.78), en sommant sur K , et en utilisant (3.70) on obtient

$$b(\psi_h, \sigma_h) + c(\psi_h, \phi_h) = F(\psi_h), \quad \forall \psi_h \in \mathcal{P}_h(\Omega) \quad (3.79)$$

où la forme bilinéaire $c(\cdot, \cdot)$ et la forme linéaire $F(\cdot)$ sont données par

$$c(w, p) = \alpha_{11} \int_{\mathcal{E}_h^\circ} \llbracket w \rrbracket \llbracket p \rrbracket d\Gamma + \alpha_{11} \int_{\mathcal{E}_h^\partial} pw d\Gamma + \int_\Omega \nu pw dK, \quad F(w) = \int_\Omega w \rho_h dK.$$

La formulation variationnelle (3.77) et (3.79), conduit à une formulation matricielle bien posée (résolution d'un système linéaire inversible) que l'on peut résoudre par des méthodes standard directes (décomposition LU) ou itératives (gradient conjugué) de l'algèbre linéaire.

3.11 Résultats numériques

3.11.1 Construction d'un équilibre gyro-water-bag

Pour construire un équilibre gyro-water-bag qui servira de condition initiale aux simulations numériques on part de l'équilibre local en $r = r_0$ que l'on a déterminé dans le paragraphe 3.5.2 et on le prolonge radialement sur le domaine $[r_{\min}, r_{\max}]$ en construisant les lignes de niveau de la fonction de distribution continue d'équilibre qui passent par l'équilibre gyro-water-bag local en $r = r_0$ défini dans le paragraphe 3.5.2, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j &= F_j - F_{j+1} \\ v_j^\circ(r) &= \sqrt{T_{i0}(r)} \mathcal{F}^{-1} \left(f_j \frac{\sqrt{T_{i0}(r)}}{n_{i0}(r)} \right) \\ v_{j0}^\pm(0, r, z) &= \pm v_j^\circ(r) \quad (\text{QL}) \\ v_j^\pm(0, r, \theta, z) &= \pm v_j^\circ(r) \quad (\text{NL}) \end{aligned} \quad (3.80)$$

(3.81)

avec $f_j = f_{eq}(r_0, v_j^\circ(r_0))$, où (NL) et (QL) désignent respectivement les cas non linéaire et quasi-linéaire. Si on dérive (3.80) par rapport à r , avec \mathcal{F} une Maxwellienne normalisée, on obtient

$$\kappa_{v_j^\circ}(r) = \frac{1}{2} \kappa_{T_{i0}}(r) \left(1 - \frac{T_{i0}(r)}{v_j^{\circ 2}(r)} \right) + \frac{T_{i0}(r)}{v_j^{\circ 2}(r)} \kappa_{n_{i0}}(r),$$

ce qui implique

$$\kappa_{v_j^\circ} \sim \mathcal{O} \left(\kappa_T, \kappa_n, \frac{1}{v_j^{\circ 2}} \right).$$

Si on conserve une discrétisation uniforme v_{\parallel} pour initialiser un équilibre gyro-water-bag et si on utilise un grand nombre de bag on voit que $\kappa_{v_i^\circ}$ peut exploser lorsque le premier bag tend vers zéro. Ce phénomène conduit au croisement des bags. De même si le nombre de bag et le gradient de température (resp. le gradient de densité) restent fixes et que la densité (resp. la température) varie beaucoup radialement alors les bags d'équilibre peuvent se croiser.

Les profils radiaux de densité et de température sont obtenus après intégration des profils de gradients

$$\begin{aligned} \kappa_{n_{i0}}(r) &= \frac{1}{n_{i0}(r)} \frac{dn_{i0}(r)}{dr} = -\kappa_{n_{i0}}^\circ \cosh^{-2} \left(\frac{r - r_0}{\Delta r_{n_{i0}}} \right) \\ \kappa_{T_{i0}}(r) &= \frac{1}{T_{i0}(r)} \frac{dT_{i0}(r)}{dr} = -\kappa_{T_{i0}}^\circ \cosh^{-2} \left(\frac{r - r_0}{\Delta r_{T_{i0}}} \right) \end{aligned}$$

où r_0 , $\kappa_{n_{i0}}^\circ$, $\kappa_{T_{i0}}^\circ$, $\Delta r_{n_{i0}}$ et $\Delta r_{T_{i0}}$ sont des paramètres libres. Ensuite on définit le paramètre $\eta(r) = d(\ln T_{i0})/d(\ln n_{i0})$ qui détermine localement si une instabilité ITG peut se développer ($\eta \geq 2$) ou non ($\eta < 2$). Les perturbations initiales pour les bags sont choisies comme il suit

$$V_{jm}^\pm(0, r, z) = v_{j0}^\pm(0, r, z)p(r)\delta p(z) \quad (\text{QL}), \quad \delta v_j^\pm(0, r, \theta, z) = v_j^\pm(0, r, \theta, z)p(r)\delta p(\theta, z) \quad (\text{NL})$$

où $p(r)$ est une fonction centrée en r_0 tel que $\lim_{r \rightarrow r_{\min}} p(r) = 0$ et $\lim_{r \rightarrow r_{\max}} p(r) = 0$. La perturbation δp est initialisée avec un seul mode ou un bain d'ondes

$$\begin{aligned} \delta p(z) &= \sum_n \epsilon_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L_z} z + \varphi_n\right) \quad (\text{QL}) \\ \delta p(\theta, z) &= \sum_{nm} \epsilon_{nm} \cos\left(\frac{2\pi n}{L_z} z + m\theta + \varphi_{mn}\right) \quad (\text{NL}) \end{aligned}$$

où ϵ et φ sont respectivement des amplitudes et des phases aléatoires

3.11.2 Instabilité ITG et turbulence gyrocinétique dans un cylindre

L'instabilité ITG est une instabilité à petite échelle qui démarre dans les régions où le gradient local de température dépasse le gradient local de densité d'une certaine quantité. A cause de l'existence d'invariants dans le système tels que l'énergie, les modes instables perturbés ne peuvent pas croître à l'infini et après un régime linéaire où les modes croissent exponentiellement une saturation quasi-linéaire locale a lieu et conduit à une relaxation locale du profil de température. Dans le régime non linéaire l'élargissement du spectre d'onde induit des phénomènes de couplages d'onde et d'interaction onde-particule non linéaire résonant qui conduisent au développement de la turbulence plasma et à l'apparition d'un transport anormal de la chaleur.

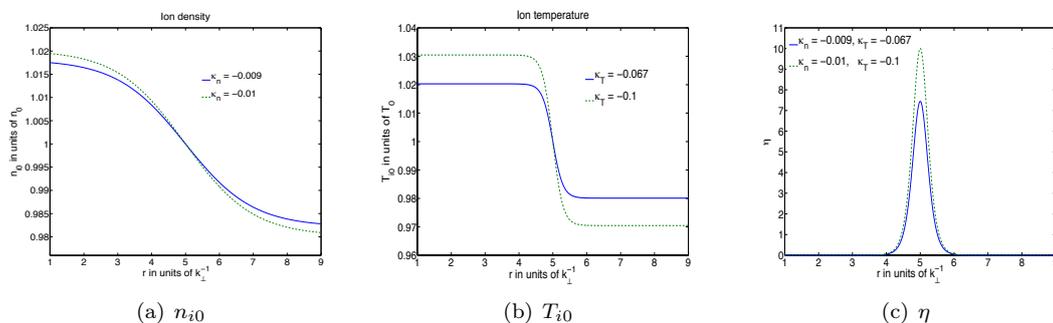


FIGURE 3.2 – profils radiaux initiaux : (a) densité, (b) température, (c) η

La figure 3.2 illustre des exemples de profils radiaux pour les conditions initiales. Afin de comparer les résultats numériques et analytiques, dans le but de valider la méthode numérique, on considère le cas des équations (3.43), (3.44) et (3.34) dans lesquelles on supprime les effets de dérive de polarisation et de gyromoyenne. Dans ce cas une analyse linéaire rigoureuse (cf Sec. 3.5 et [171, 172]), peut être faite et donne les taux de croissance de l'instabilité ITG. Dans ce cas test on choisit $\varepsilon_\omega = \varepsilon_k = \varepsilon_\delta = 10^{-3}$ et le domaine radial est tel que $r \in [1, 5]$. On choisit de perturber le mode $(m, n) = (20, 1)$. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.1.

Bien que les valeurs des taux de croissance théoriques et numériques soient en bon accord (cf tableau 3.1), les modèles QL et NL ne sont pas bien posés sans terme de dérive de polarisation et le régime non linéaire n'a pas de sens parce qu'il n'existe aucun opérateur différentiel dans le plan transverse ou mécanisme physique qui puisse empêcher l'excitation des petites échelles sans les amortir. En d'autres termes tous les modes dans la limite $k_\perp \rightarrow \infty$ sont instables, ce qui signifie que la solution explose en temps fini. Par conséquent la seconde étape est de

cas	$\kappa_n = 1.5 \cdot 10^{-4}$ $\kappa_T = 1.5 \cdot 10^{-3}$ $\mathcal{N} = 8, \tau = 1$ $v_{\max} = 6$	$\kappa_n = 1.5 \cdot 10^{-4}$ $\kappa_T = 1.5 \cdot 10^{-3}$ $\mathcal{N} = 10, \tau = 0.2$ $v_{\max} = 5$	$\kappa_n = 1.5 \cdot 10^{-4}$ $\kappa_T = 7.5 \cdot 10^{-4}$ $\mathcal{N} = 10, \tau = 1$ $v_{\max} = 5$	$\kappa_n = 1.5 \cdot 10^{-4}$ $\kappa_T = 6.45 \cdot 10^{-4}$ $\mathcal{N} = 10, \tau = 1$ $v_{\max} = 5$
γ^{theory}	0.80	1.80	0.22	0.097
γ^{numeric}	0.85	1.83	0.22	0.095

TABLE 3.1 – Comparaison des taux de croissance analytiques et numérique sans dérive de polarisation ni gyromoyenne

comparer les taux de croissance de l'instabilité ITG donnés par le modèle quasi-linéaire (3.41)-(3.44) -référéncé par QL- résolu par la méthode de Runge-Kutta-Galerkin-discontinu et ceux donnés par le modèle non linéaire (3.33)-(3.34) -référéncé par NL- résolu par la méthode de Runge-Kutta semi-Lagrangienne. Si les modèles QL et NL sont différents ils doivent avoir le même comportement (même taux de croissance) dans le régime linéaire. Dans ce cas test on choisit un domaine radial tel que $r \in [1, 9]$, et $z, \theta \in [0, 2\pi]$. Les paramètres adimensionnés ε_ω , ε_k et ε_δ sont égaux à 10^{-3} et le nombre de bag est fixé à $\mathcal{N} = 6$. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.2.

cas	$\kappa_n = -0.02$ $\kappa_T = -0.1625$ $(m, n) = (6, 3)$	$\kappa_n = -0.03$ $\kappa_T = -0.24$ $(m, n) = (6, 3)$	$\kappa_n = -0.04$ $\kappa_T = -0.32$ $(m, n) = (6, 3)$	$\kappa_n = -0.02$ $\kappa_T = -0.40$ $(m, n) = (6, 3)$
γ_{QL}	1.70	2.12	2.44	4.30
γ_{NL}	1.70	2.12	2.44	4.30
case	$\kappa_n = -0.01$ $\kappa_T = -0.08$ $(m, n) = (6, 3)$	$\kappa_n = -0.01$ $\kappa_T = -0.075$ $(m, n) = (6, 3)$	$\kappa_n = -0.009$ $\kappa_T = -0.069$ $(m, n) = (10, 3)$	$\kappa_n = -0.009$ $\kappa_T = -0.067$ $(m, n) = (10, 3)$
γ_{QL}	0.74	0.56	0.65	0.568
γ_{NL}	0.74	0.56	0.65	0.568

TABLE 3.2 – Comparaison des taux de croissance entre le modèle QL et NL

D'après le tableau 3.2 on observe que les modèle QL et NL donnent le même taux de croissance ce qui participe à la validation de l'approximation numérique mise en ouvre. Maintenant comparons le niveau de la turbulence entre le modèle QL et NL. Les paramètres de discrétisation sont résumés dans les tableaux 3.3 et 3.4. Pour les deux cas tests on a pris les paramètres $\tau = 1$, $\varepsilon_\omega = \varepsilon_k = \varepsilon_\delta = 10^{-3}$, $v_{\max} = 5$, $r_{\min} = 1$, $r_{\max} = 9$, $z, \theta \in [0, 2\pi]$ et $\mathcal{N} = 6$.

	Δt	Δr	Δz	N_r	N_z	(m, n)
$\kappa_n = -0.009$ $\kappa_T = -0.067$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$9.80 \cdot 10^{-3}$	64	64	(10, 3)
$\kappa_n = -0.01$ $\kappa_T = -0.1$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$9.80 \cdot 10^{-3}$	64	64	(6, 3)

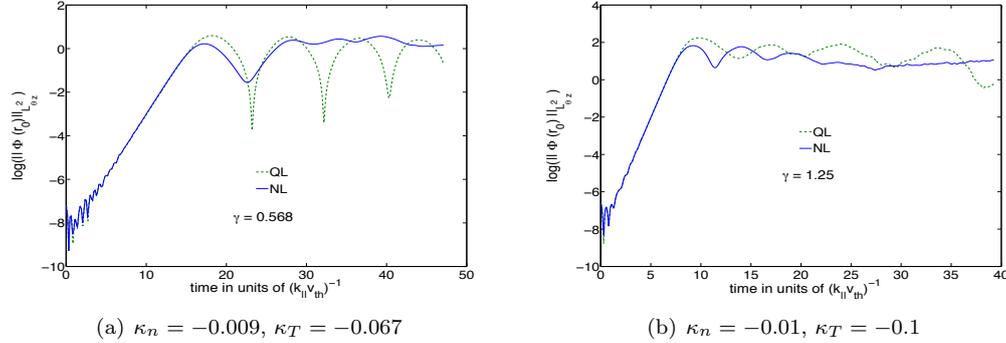
TABLE 3.3 – Paramètres de discrétisation pour le modèle QL

La figure Fig. 3.3 montre l'évolution de logarithme de la norme L^2 du potentiel électrique au point $r = r_0$ pour les modèles QL et NL. Si durant la phase linéaire les modèles QL et NL donnent les mêmes résultats, on observe que dans le régime non linéaire leur comportement diffère comme attendu. Même si les solutions des modèles QL et NL diffèrent, elles donnent un niveau d'énergie électrique relativement semblable, ce qui signifie que les coefficients de transport (coefficient de diffusion) sous-jacents à chaque modèle sont du même ordre de grandeur et donc le niveau de turbulence aussi.

Valider le régime non linéaire est difficile car dans la plupart des cas on ne connaît pas de solution analytique. Cependant dans notre cas il est bien connu que l'équation de Vlasov conserve un certain nombre de quantités physiques et mathématiques, telles que la masse,

	Δt	Δr	Δz	$\Delta\theta$	N_r	N_z	N_θ	(m, n)
$\kappa_n = -0.009$ $\kappa_T = -0.067$	4.10^{-3}	$6.30 \cdot 10^{-2}$	$4.90 \cdot 10^{-2}$	$2.45 \cdot 10^{-2}$	128	128	256	(10, 3)
$\kappa_n = -0.01$ $\kappa_T = -0.1$	$7.85 \cdot 10^{-3}$	$6.30 \cdot 10^{-2}$	$9.80 \cdot 10^{-2}$	$4.90 \cdot 10^{-2}$	128	64	128	(6, 3)

TABLE 3.4 – Paramètres de discretisation pour le modèle NL

FIGURE 3.3 – Norme L^2 du potentiel électrique au point $r = r_0$.

l'entropie cinétique, l'énergie totale, les normes L^p et plus généralement les intégrales, étendues à l'espace des phases, de $\beta(f)$ où β est une fonction régulière. Evidemment ces propriétés de conservation sont encore vraies pour le modèle gyro-water-bag. En utilisant la fonction de distribution (3.7), les invariants de Casimir de l'équation de Vlasov deviennent

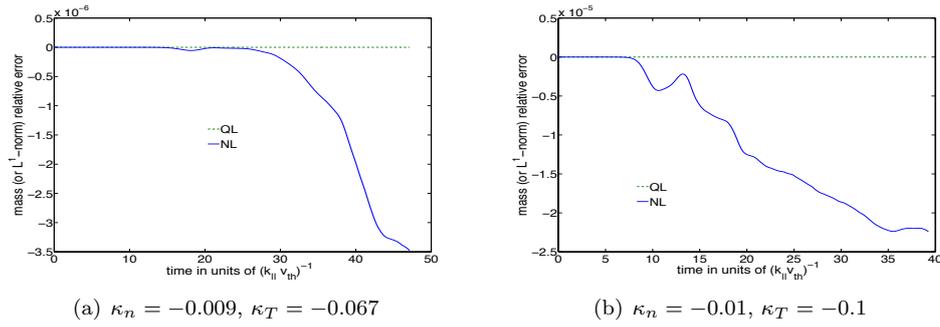
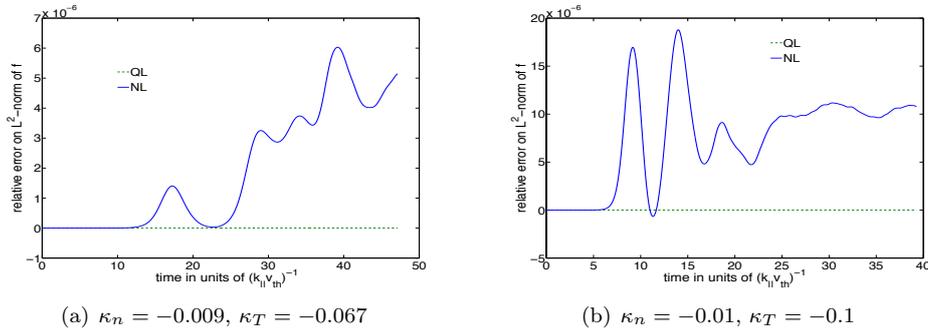
$$\int \beta(f) 2\pi \frac{2\Omega_i}{q_i} \mathbf{r} d v_{\parallel} d\mu = \sum_{\mu_j} 2\pi \sqrt{\frac{2\Omega_i \mu}{q_i}} (\beta(f_{\mu_j}) - \beta(f_{\mu_{j+1}})) \int (v_{\mu_j}^+ - v_{\mu_j}^-) d\mathbf{r}.$$

On définit alors l'erreur relative $\text{Rel.Err}(\mathcal{Q})$ de la quantité conservée \mathcal{Q} comme

$$\text{Rel.Err}(\mathcal{Q})(t) = \frac{\mathcal{Q}(t) - \mathcal{Q}(0)}{\mathcal{Q}(0)}.$$

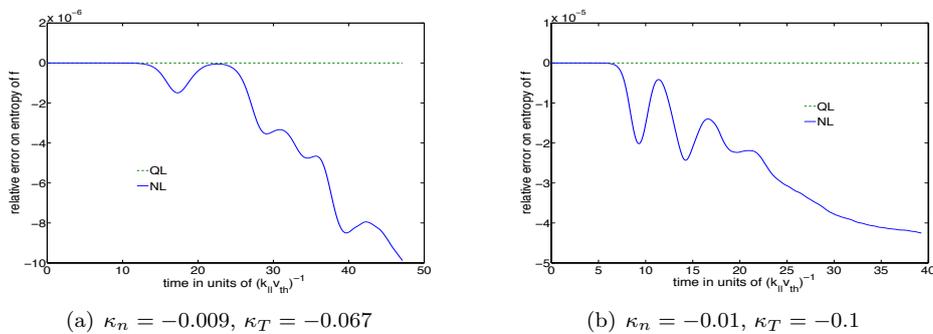
Ces invariants constituent un bon critère pour évaluer le comportement de la méthode numérique dans le régime non linéaire. La figure 3.4 (resp. 3.5) montre l'évolution de $\text{Rel.Err}(\|f\|_{L^1})$, (resp. $\text{Rel.Err}(\|f\|_{L^2})$). La figure 3.6 décrit l'évolution temporelle de $\text{Rel.Err}(f \ln f)$. Pour le modèle QL, dans le cas où $\kappa_n = -0.009$ et $\kappa_T = -0.067$, l'erreur relative des normes L^2 , L^1 (masse) et de l'entropie cinétique restent en dessous de 10^{-12} et pour le cas où les gradients sont $\kappa_n = -0.01$ et $\kappa_T = -0.1$, elles sont inférieures à 10^{-9} . On note que ces conservations sont meilleures que pour le modèle NL dans le régime non linéaire. Ces résultats peuvent s'expliquer par le développement croissant des petites échelles dans le plan transverse. Lorsque la taille de ces structures devient plus petite que la taille typique d'une maille alors les structures sont régularisées et de l'information est irréversiblement perdue, conduisant à la déviation de toutes les quantités conservées. Notons que dans le cas NL toutes les modes poloïdaux (que peut reproduire le maillage en θ) peuvent participer au régime non linéaire en se couplant entre eux, alors que pour le modèle QL ils sont fixés a priori ($m = 10$ ou $m = 6$, dans notre cas). Cependant même pour le modèle NL les erreurs relatives sont toujours en dessous de 10^{-4} .

Comme dans les codes PIC ([146]) ou Vlasov [131], la conservation de l'énergie est la plus difficile à satisfaire. En terme de conservation d'énergie le modèle NL se comporte mieux que le modèle QL. A la lumière de la théorie quasi-linéaire (cf Sec. 3.6) on sait que l'énergie totale est conservée jusqu'à l'ordre deux en la perturbation, ce qui explique pourquoi la conservation d'énergie est moins bonne dans le cas du modèle QL. Cependant cette conservation est bonne

FIGURE 3.4 – Erreur relative de la norme L^1 (ou masse) de f .FIGURE 3.5 – Erreur relative de la norme L^2 de f .

puisque l'erreur relative reste en dessous de 3×10^{-4} pour $\kappa_n = -0.009/\kappa_T = -0.067$ et inférieure à 5×10^{-3} pour $\kappa_n = -0.01/\kappa_T = -0.1$ (cf Fig. 3.7).

Dans les plasmas magnétisés, si un écoulement de cisaillement existe en même temps que des gradients de densité et température (sources de la turbulence), l'écoulement de cisaillement peut supprimer la turbulence et entraîner une relaxation du gradient de pression. Ces écoulements de cisaillement peuvent être auto-générés (cohérence du système), auquel cas le tenseur des contraintes de Reynolds est le terme par lequel ils apparaissent. La rétro-action des écoulements de cisaillement sur la turbulence alimentée par les gradients de pression, est le mécanisme central qui régit l'état de la turbulence et du transport; en particulier il peut conduire à des barrières de transport internes. En fait plusieurs simulations non linéaires montrent une réduction significative du transport lorsque les écoulements zonaux sont présents [207, 165, 147].

FIGURE 3.6 – Erreur relative de l'entropie de f .

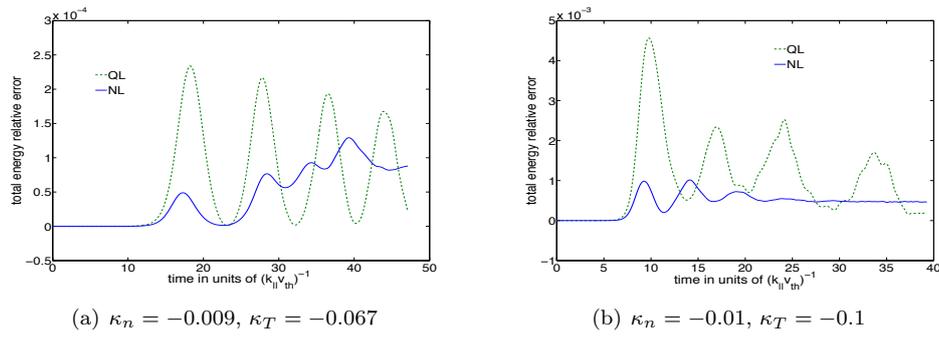


FIGURE 3.7 – Erreur relative sur l'énergie totale.

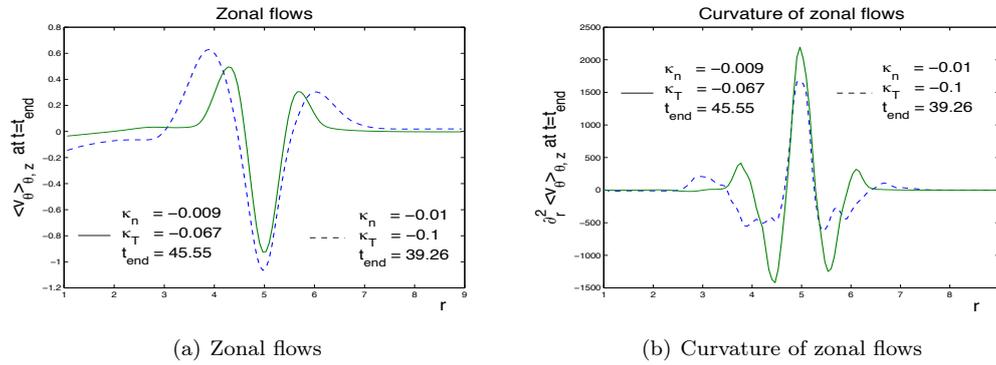


FIGURE 3.8 – flux zonaux (a), courbure des flux zonaux(b) , dans le cas non linéaire

Dans un article de revue sur les phénomènes des écoulements zonaux [90], les auteurs montrent que la vitesse poloïdale de cisaillement joue un rôle important dans la régulation (voire la suppression) du transport turbulent. La figure 3.8 (a) représente la vitesse poloïdale moyenne $\langle v_\theta \rangle_{\theta,z} = \partial_r \langle \phi \rangle_{\theta,z}$, i.e. les fameux écoulements zonaux, alors que la figure 3.8 (b) décrit leur courbure, i.e. leur dérivée seconde. La figure 3.8 indique la présence d'une couche de cisaillement de vitesse poloïdale centrée au point $r = r_0 = 5$. Sur la figure 3.8 on observe que le maximum du flux de cisaillement et de sa courbure est localisé au même point $r = r_0$. Ces résultats sont du point de vue qualitatif en accord avec ceux obtenus par le code Vlasov gyrocinétique GYSELA [131, 196]. En accord avec la théorie linéaire et d'autres simulations numériques [196], ces résultats suggèrent que des forts gradients de température associés à un maximum de courbure des flux zonaux peuvent conduire à une barrière de transport interne. L'existence d'une mince couche de cisaillement de vitesse poloïdale peut être observée sur les coupes (r, θ) du potentiel électrique Fig. 3.9 (b) au temps $t = 45.55$ et Fig. 3.10 (b) aux temps $t = 26.70$ et $t = 39.26$.

Dans les figures 3.9 et 3.10 on peut observer la coupe transverse d'un contour, en l'occurrence v_1^- , et du potentiel électrique. La phase linéaire est observée jusqu'aux temps $t = 9.42$ Fig. 3.9, et $t = 4.71$ Fig. 3.10, après lesquels commence la phase non linéaire. Dans le régime non linéaire on observe la présence de flux zonaux et le développement du phénomène de filamentation du contour v_1^- dans le plan transverse. La nature incompressible du transport dans la direction transverse conduit au phénomène de filamentation, aussi observé dans l'espace des phases avec l'équation de Vlasov. Ce processus peut poser des problèmes numériques en temps long, parce qu'il produit le développement d'échelles poloïdales toujours plus petites. Lorsque l'échelle de ces structures est plus petite que la taille typique de la maille les inconnues du problème sont régularisées, ce qui correspond à l'addition non physique d'effets de diffusion. Cependant lorsqu'on tient compte des effets de rayon de Larmor fini, on introduit un mécanisme de régularisation physique naturel qui consiste à une moyennisation dans l'espace transverse.

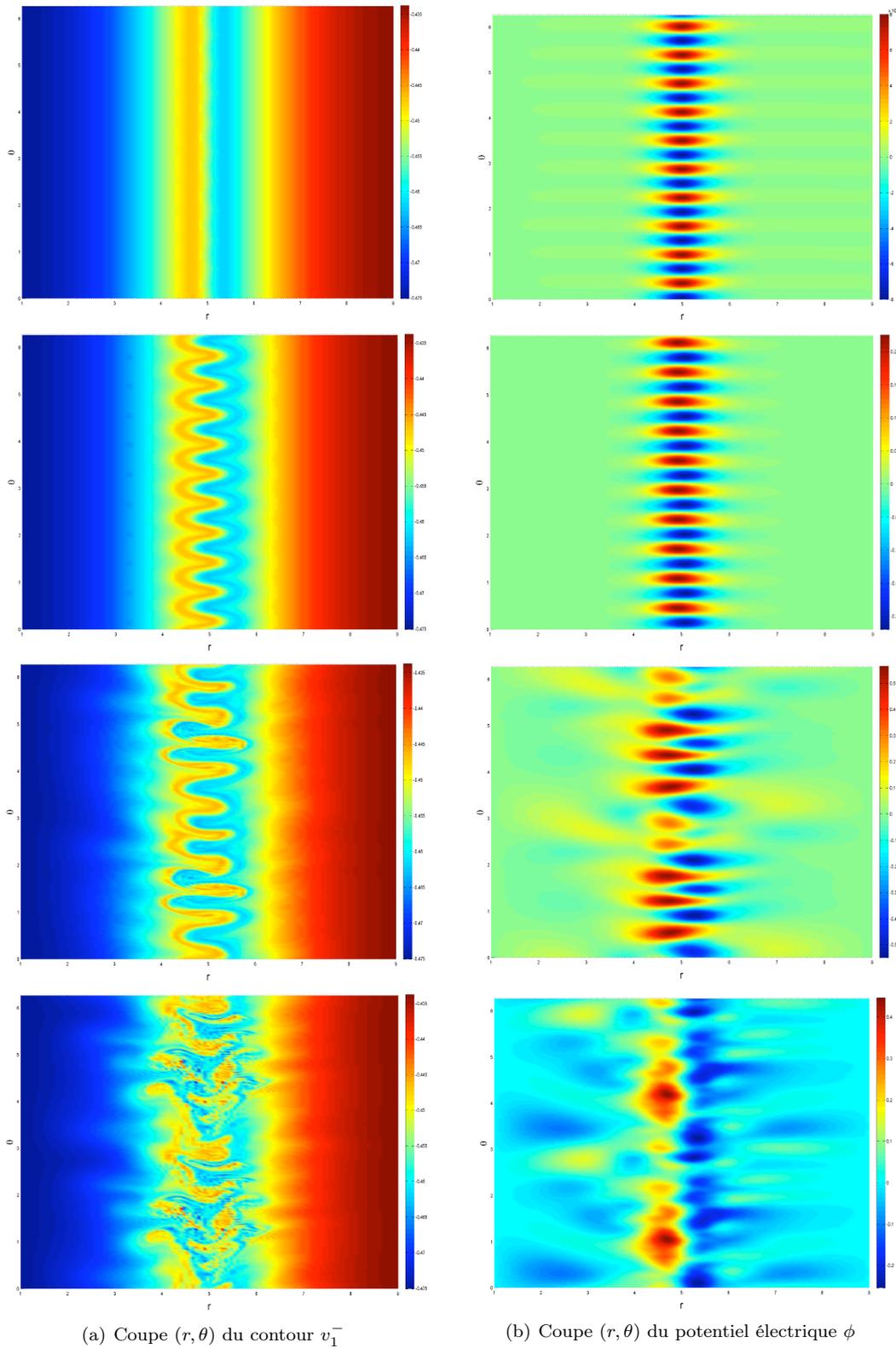


FIGURE 3.9 – (a) : Coupe (r, θ) du contour v_1^- ; (b) : potentiel électrique ϕ aux temps $t = 9.42$, $t = 18.84$, $t = 37.70$ et $t = 45.55$ pour $\kappa_n = -0.009$ et $\kappa_T = -0.067$.

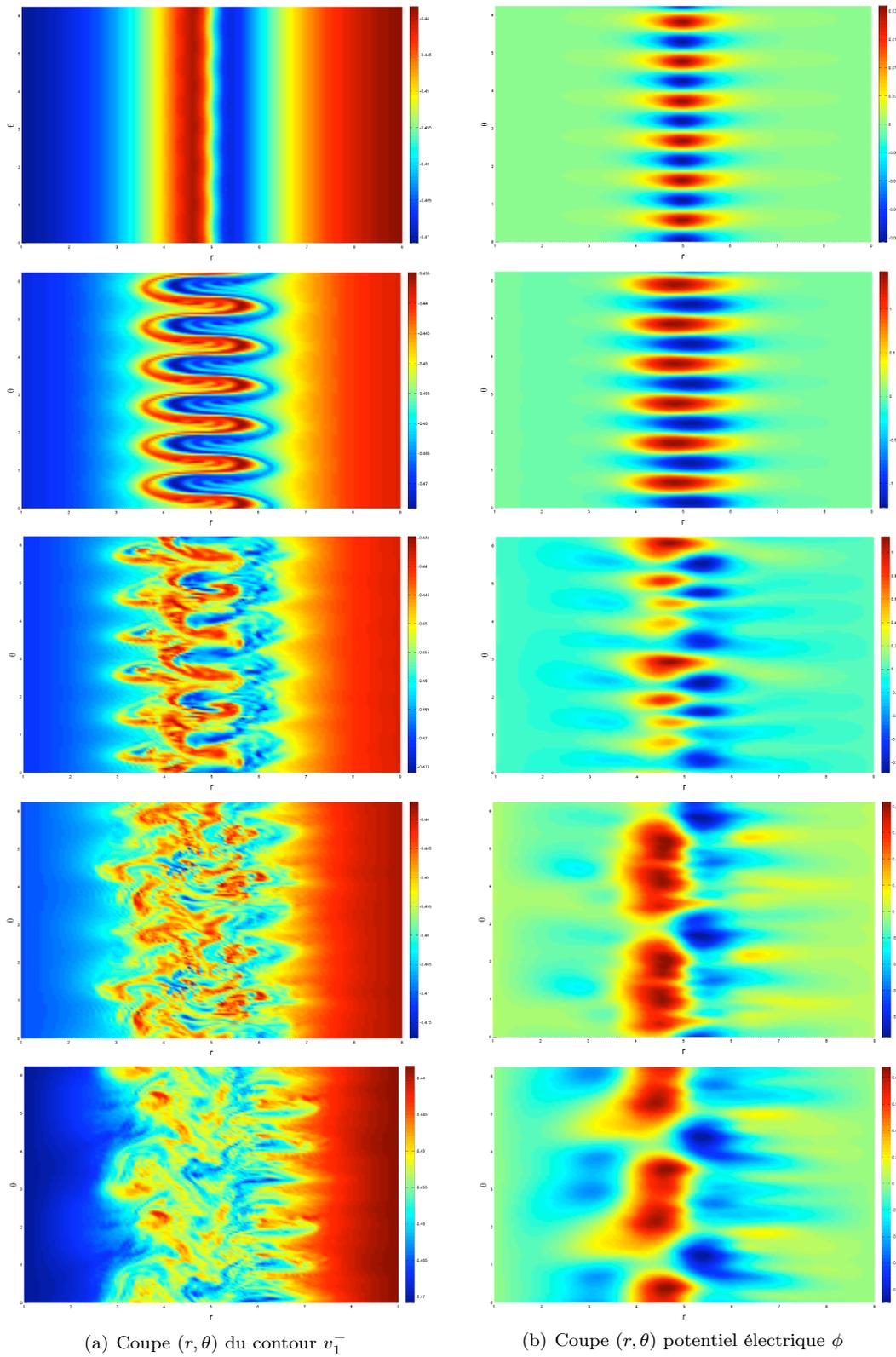


FIGURE 3.10 – (a) : Coupe (r, θ) du contour v_1^- ; (b) : potentiel électrique ϕ aux temps $t = 4.71$, $t = 9.42$, $t = 17.27$, $t = 26.70$ et $t = 39.26$ pour $\kappa_n = -0.01$ et $\kappa_T = -0.1$

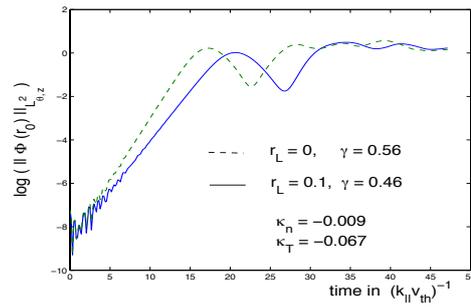
(a) Norme L^2 de ϕ au point $r = r_0$

FIGURE 3.11 – Comparaison de la norme L^2 du potentiel électrique au point $r = r_0$ pour $\kappa_n = -0.009$, $\kappa_T = -0.067$ lorsqu'on considère l'opérateur de gyromoyenne ($r_L = 0.1$) ou non ($r_L = 0$)

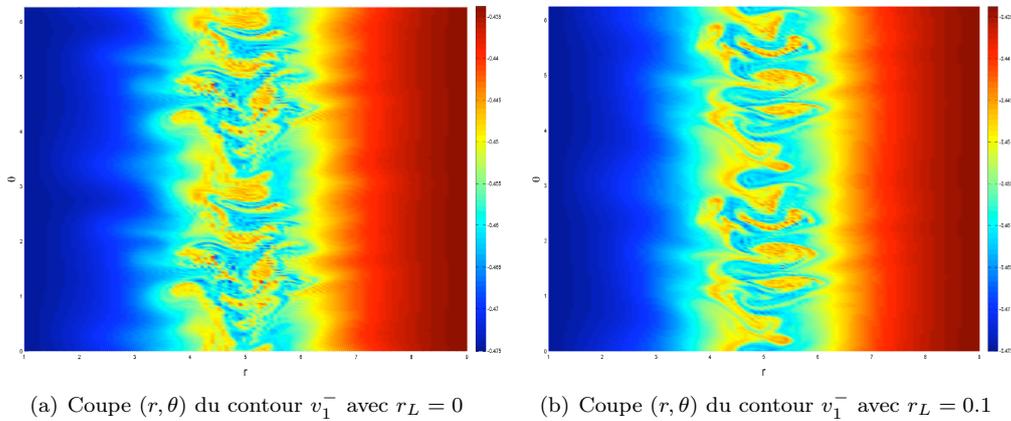
(a) Coupe (r, θ) du contour v_1^- avec $r_L = 0$ (b) Coupe (r, θ) du contour v_1^- avec $r_L = 0.1$

FIGURE 3.12 – Comparaison des coupes (r, θ) du contour v_1^- lorsqu'on considère l'opérateur de gyromoyenne (b) ou non (a) pour $\kappa_n = -0.009$, $\kappa_T = -0.067$ au temps $t = 45.55$

Par conséquent l'addition de l'opérateur de gyromoyenne (3.4) tend à limiter le développement des petites échelles. Par exemple les figures 3.11 et 3.12 donne une illustration de l'effet de l'opérateur de gyromoyenne. Sur la figure 3.11 (a) on observe que le taux de croissance de l'instabilité est plus petit que celui obtenu sans gyromoyenne, comme attendu. Sur la figure 3.12 on remarque que les structures transverses sont légèrement régularisées.

Chapitre 4

Analyse mathématique de quelques méthodes numériques

Sommaire

4.1	Introduction	74
4.2	Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Poisson	74
4.2.1	Introduction	74
4.2.2	Le problème continu	75
4.2.3	Le problème discret	77
4.2.4	Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori	79
4.3	Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Einstein	80
4.3.1	Introduction	80
4.3.2	Le problème continu	82
4.3.3	Le problème discret	85
4.3.4	Théorèmes de convergence et estimations d'erreurs a priori	87
4.4	Méthodes de Runge-Kutta-Galerkin-discontinu conservant localement $\nabla \cdot B = 0$ pour l'équation d'induction de la MHD	88
4.4.1	Introduction	88
4.4.2	Le schéma numérique	89
4.4.3	Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori	91

4.1 Introduction

Dans cette section on présente des preuves de convergence et des estimations d'erreurs a priori pour plusieurs méthodes numériques Euleriennes dites semi-Lagrangiennes concernant l'équation de Vlasov. En effet la résolution directe de l'équation de Vlasov sur une grille de l'espace des phases est devenue un outil puissant pour étudier en détail la dynamique des particules parce qu'elle offre une résolution fine de l'espace des phases [62, 29, 36, 10] qui est assurée en chaque point de l'espace des phases par des estimations d'erreurs a priori. Les codes Vlasov fournissent une bonne description des forts gradients et des petites échelles qui se développent dans l'espace des phases, bien que le mécanisme de filamentation et de mélange de l'espace des phases finissent par être saturés par la dissipation numérique. Au contraire les méthodes PIC ont l'inconvénient de décrire avec très peu de précision les processus d'accélération de particules. Cela est dû au fait que les méthodes PIC manquent de particules numériques pour bien représenter en détail la structure de la fonction de distribution dans des régions de l'espace des phases où a lieu l'interaction résonante onde-particule non linéaire ; ce qui peut modifier les propriétés du transport. En effet il est bien connu [110, 215, 216, 198, 121, 193] que le bruit numérique inhérent aux méthodes PIC décroît en $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ où N est le nombre de particule. Les premiers résultats concernent l'analyse mathématique de méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Poisson. Un autre résultat traite de l'analyse de méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Einstein en symétrie sphérique. Le dernier paragraphe concerne l'analyse de méthodes Runge-Kutta-Galerkin-discontinu qui préservent localement la nullité de la divergence du champ magnétique pour l'équation d'induction de la MHD idéale. Bien que la MHD idéale ne soit pas au centre de ce travail, il nous a semblé intéressant de présenter ces résultats, puisqu'ils concernent la méthode Galerkin-discontinu dont nous avons déjà beaucoup discuté dans les deux chapitres précédents.

4.2 Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Poisson

4.2.1 Introduction

Bien que de nombreux articles de mécanique des fluides et de physique des plasmas où sont utilisées des méthodes semi-Lagrangiennes (cf [10, 29, 62, 205]) présentent des résultats numériques satisfaisants, peu de résultats rigoureux sur l'analyse de convergence de ces méthodes existent. Malgré quelques estimations a priori intéressantes [14, 15, 103] pour des cas particuliers, l'analyse de convergence dans des situations plus générales reste encore à faire. L'étape la plus importante dans ce type d'analyse est d'obtenir un résultat de stabilité sur les opérateurs d'interpolation. Alors que la stabilité L^∞ semble inaccessible pour des opérateurs d'interpolation d'ordre élevé, à cause du phénomène de Runge (oscillations artificielles dont l'amplitude croît avec le degré des polynômes dans le cas de l'interpolation de Lagrange et qui apparaissent sur le bord des éléments finis) le cadre fonctionnel approprié est la stabilité L^2 . Dans cette section on continue l'analyse de convergence des méthodes semi-Lagrangiennes commencée dans [30, 35]. Les estimations a priori d'ordre élevé annoncées dans [30], sont rigoureusement prouvées ici. Dans l'article [29] on a introduit un nouveau schéma semi-Lagrangien pour les maillages non structurés de l'espace des phases afin de traiter des géométries complexes et utiliser le raffinement local de maillages. Ces schémas utilisent des reconstructions de type éléments finis telles que l'interpolation de Lagrange et d'Hermite, pour lesquelles le gradient de la fonction de distribution est aussi transporté [29]. L'interpolation de type Hermite conduit à des schémas d'ordre élevé, stables et peu diffusifs, alors que des méthodes semi-Lagrangiennes construites sur l'interpolation de Lagrange conduisent à des schémas convergents mais trop diffusifs pour des degrés d'interpolation inférieurs ou égaux à deux, et à des schémas instables dans n'importe quelle norme L^p pour des degrés d'interpolation supérieurs ou égaux à trois. Cependant sur des grilles uniformes, si on utilise des interpolations de Lagrange symétriques on peut retrouver la stabilité L^2 et conserver des schémas d'ordre élevé et peu diffusifs. Dans cette section on prouve la convergence de tels schémas. Le cas des grilles uniformes est inté-

ressant non seulement parce que l'analyse est plus simple, mais aussi parce qu'il donne des résultats très satisfaisants dans de nombreuses applications physiques [10, 204]. Dans l'article [30] l'analyse de convergence d'un schéma, défini sur une triangulation au moyen d'un opérateur d'interpolation de Lagrange du premier ordre, est réalisée dans le cadre L^∞ . L'analyse de convergence et des estimations d'erreurs a priori d'ordre élevé pour un schéma semi-Lagrangien avec propagation de gradients sur des grilles uniformes ont été donnés dans [35]. Même si les principales idées de la preuve sont contenues dans [30], le cadre de la stabilité L^2 implique des estimations différentes et nous oblige à manipuler avec précaution les opérateurs d'interpolation dans un sens judicieux qui est très différent de ce qui a été fait dans [30]. De plus la clef de voûte de la preuve réside dans l'étude précise et fine de la stabilité des opérateurs d'interpolation. Alors que cette étude est généralement évidente pour l'interpolation d'ordre faible, elle devient, de manière évidente, très difficile pour l'interpolation d'ordre élevé.

4.2.2 Le problème continu

4.2.2.1 Le modèle de Vlasov-Poisson

On désigne par $f(t, x, v) \geq 0$ la fonction de distribution des électrons dans l'espace des phases. (la masse et la charge sont normalisées à l'unité), et par $E(t, x)$ le champ électrique auto-cohérent. Le système de Vlasov-Poisson adimensionné s'écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{dE}{dx}(t, x) = \rho(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv - 1, \quad (4.2)$$

où x et v sont des variables indépendantes. On considère un plasma périodique, de période L . Alors dans (4.1) et (4.2) on a $x \in [0, L]$, $v \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les fonctions f et E satisfont les conditions aux limites périodiques

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v) \quad v \in \mathbb{R} \quad t \geq 0, \quad (4.3)$$

et

$$E(t, 0) = E(t, L) \iff \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv dx = 1, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

ce qui signifie que le plasma est globalement neutre. Afin d'avoir un problème bien posé on ajoute aux équations (4.1)-(4.4) la condition de moyenne nulle sur le champ électrique

$$\int_0^L E(t, x) dx = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

et la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad x \in [0, L], \quad v \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

En supposant le champ électrique E assez régulier on peut résoudre les équations (4.1), (4.3) et (4.6) dans le sens classique comme il suit. On renvoie le lecteur à la référence [47], pour l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système différentiel suivant.

On considère le système différentiel du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t; s, x, v) &= V(t; s, x, v), \\ \frac{dV}{dt}(t; s, x, v) &= E(t, X(t; s, x, v)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

On désigne par $t \rightarrow (X(t; s, x, v), V(t; s, x, v))$ les courbes caractéristiques qui sont solutions de (4.7) avec les conditions initiales

$$X(s; s, x, v) = x \quad V(s; s, x, v) = v. \quad (4.8)$$

La solution du problème (4.1) et (4.6) est alors donnée par

$$f(t, x, v) = f_0(X(0; t, x, v), V(0; t, x, v)), \quad x, v \in \mathbb{R} \quad t \geq 0. \quad (4.9)$$

Notons que la périodicité en x de $f_0(x, v)$ et $E(t, x)$ implique la périodicité en x de $f(t, x, v)$. De plus, comme

$$\left| \frac{\partial(X, V)}{\partial(x, v)} \right| = 1,$$

on obtient

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv dx = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) dv dx = 1.$$

Par conséquent, selon les précédentes considérations, le système de Vlasov-Poisson périodique consiste à trouver le couple (f, E) , suffisamment régulier, périodique en x , de période L , qui résout les équations (4.2), (4.7), (4.8), et (4.9). En introduisant le potentiel électrostatique $\phi = \phi(t, x)$ tel que $E(t, x) = -\partial_x \phi(t, x)$, et en notant par $G = G(x, y)$ la solution fondamentale du Laplacien en une dimension (i.e. $-\partial_x^2 G(x, y) = \delta(x-y)$) avec conditions aux limites périodiques, on obtient

$$E(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y, v) dv - 1 \right) dy,$$

où

$$K(x, y) = -\partial_x G(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{y}{L} - 1\right) & 0 \leq x < y \\ \frac{y}{L} & y < x \leq L. \end{cases}$$

4.2.2.2 Problème de Cauchy

Dans ce paragraphe on rappelle le théorème d'existence et d'unicité des solutions globales classiques pour le système de Vlasov-Poisson périodique. Soit $W^{1,\infty}$ l'espace de Sobolev consistant à l'ensemble des fonctions ϕ dont les dérivées partielles $D^\alpha \phi$, prises au sens des distributions, et d'ordre $|\alpha| \leq 1$ appartiennent à L^∞ . On définit alors $W_{c,per_x}^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ comme le sous espace de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ consistant à l'ensemble des fonctions ϕ telles que pour $0 \leq |\alpha| \leq 1$, $D^\alpha \phi$ est périodique en x et a un support compact en v .

Théorème 11 *On suppose que $f_0 \in W_{c,per_x}^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ est positive, périodique en x , de période L , $Q(0) \leq R$ avec $R > 0$ où $Q(t)$ est défini par*

$$Q(t) = 1 + \sup \{ |v| : \exists x \in [0, L], \tau \in [0, t] \mid f(\tau, x, v) \neq 0 \},$$

et

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) dv dx = 1.$$

Alors le système de Vlasov-Poisson périodique a une unique solution classique (f, E) , périodique en x , de période L , pour tout temps t dans $[0, T]$, telle que

$$f \in W^{1,\infty} \left(0, T; W_{c,per_x}^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \right),$$

$$E \in W^{1,\infty} \left(0, T; W_{per_x}^{1,\infty}(\mathbb{R}) \right),$$

et il existe une constante $C = C(R, f_0)$ dépendant de R et f_0 telle que

$$Q(T) \leq CT.$$

De plus, si on suppose $f_0 \in W_{c,per_x}^{m,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, alors $(f, E) \in W^{m,\infty} \left(0, T; W_{c,per_x}^{m,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v) \right) \times W^{m,\infty} \left(0, T; W_{per_x}^{m,\infty}(\mathbb{R}) \right)$, pour tout temps fini T .

Preuve. On renvoie le lecteur aux références [120] et [47] pour la preuve. ■

4.2.3 Le problème discret

4.2.3.1 Définitions et notations

Soit $\Omega = [0, L] \times [-R, R]$, avec $R > Q(T)$, et \mathcal{M}_h une grille uniforme de l'espace des phases Ω . Le maillage \mathcal{M}_h est alors donné par deux suites croissantes $(x_i)_{i \in \{0, \dots, N_x\}}$ et $(v_i)_{i \in \{0, \dots, N_v\}}$ des intervalles respectifs $[0, L]$ et $[-R, R]$. Soit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ le pas de discrétisation de l'espace physique et $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ le pas de discrétisation de l'espace des vitesses. Pour simplifier l'analyse de convergence on suppose que $\Delta x_i = \Delta x = L/(N_x + 1)$ et $\Delta v_i = \Delta v = 2R/(N_v + 1)$ où $N_x, N_v \in \mathbb{N}$. On définit $h = \max\{\Delta x, \Delta v\}$.

Pour chaque fonction g définie sur l'ensemble $(x_i, v_j) \in \mathcal{M}_h$, on pose $g_{i,j} := g(x_i, v_j)$, et on complète la suite sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par périodicité, en posant $g_{i,j} := g_{i \bmod N_x + 1, j \bmod N_v + 1}$. La suite (x_i, v_j) sera aussi définie sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par $x_i := i\Delta x$ et $v_j := -R + j\Delta v$. On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions Ω -périodiques (L -périodique en x et $2R$ -périodique en v). On a donc $g_{i,j} = g(x_i, v_j)$ pour tout $g \in \mathcal{P}(\Omega)$ et pour tous les indices $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. En fait on ne considérera que des fonctions qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$. Soit maintenant $f = \{f_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ une fonction grille périodique de période $N_x + 1$ (resp. $N_v + 1$) en i (resp. j). Si f est une fonction définie sur les points de \mathcal{M}_h , on peut lui associer une fonction grille \hat{f} définie par $\hat{f}_{i,j} := f(x_i, v_j)$ pour tout $(i, j) = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{N}$ où on pose $\mathbf{N} = (N_x, N_v)$ et $\mathbf{0} = (0, 0)$. On remplacera \hat{f} par f , afin de simplifier les notations. Soit $L_h^2(\Omega)$, l'ensemble des fonctions grilles dont la norme $\|\cdot\|_{L_h^2(\Omega)}$ est bornée avec

$$\|f\|_{L_h^2(\Omega)} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{(i,j)=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} |f_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Comme dans le cas continu on peut définir un produit scalaire discret $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_h^2(\Omega)}$. En effet soit f et g deux fonctions grilles de $L_h^2(\Omega)$ à valeur complexe. Le produit scalaire $\langle f, g \rangle_{L_h^2(\Omega)}$ est alors défini par

$$\langle f, g \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \Delta x \Delta v \sum_{(i,j)=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} f_{i,j} \overline{g_{i,j}}.$$

Soit $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_v)$, un vecteur de \mathbb{Z}^2 . Soit \mathbf{z} et \mathbf{k} les abréviations respectives de (x, v) et (k_x, k_v) . Alors k_x (resp. k_v) prend les valeurs $2\pi\omega_x/L$ (resp. $2\pi\omega_v/(2R)$) où ω_x (resp. ω_v) est un entier et les indices $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ correspondent aux points $\mathbf{z}_{i,j} := (x_i, v_j)$ de l'espace des phases. Si on définit maintenant,

$$\phi_{\boldsymbol{\omega}}(x, v) = \phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{z}) = \frac{e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle}}{|\Omega|^{1/2}}$$

avec $\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle = \frac{2\pi\omega_x}{L}x + \frac{2\pi\omega_v}{2R}v$, les fonctions $\{\phi_{\boldsymbol{\omega}}\}_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}}$ forment une base orthonormée sur \mathcal{M}_h pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_h^2(\Omega)}$. On a alors

$$\langle \phi_{\boldsymbol{\omega}}, \phi_{\boldsymbol{\nu}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \delta_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}}.$$

Si la fonction $\phi = \sum_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \phi_{\boldsymbol{\omega}}$ interpole f aux points de \mathcal{M}_h , on alors $f = \phi$ sur \mathcal{M}_h et

$$\langle \phi, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \langle f, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \sum_{\boldsymbol{\nu}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \hat{f}(\boldsymbol{\nu}) \langle \phi_{\boldsymbol{\nu}}, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \hat{f}(\boldsymbol{\omega})$$

où

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{(i,j)=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} f_{i,j} e^{-i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0), (1, 0), (0, 1), \dots, \mathbf{N}. \quad (4.10)$$

Evidemment si $\phi = \sum_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \phi_{\boldsymbol{\omega}}$ interpole f aux points de \mathcal{M}_h , alors

$$f_{i,j} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\boldsymbol{\omega}=\mathbf{0}}^{\mathbf{N}} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_v. \quad (4.11)$$

De plus on a une version discrète de l'égalité de Parseval

$$\|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2 = \Delta x \Delta v \sum_{(i,j)=0}^N |f_{i,j}|^2 = \sum_{\omega=0}^N |\widehat{f}(\omega)|^2.$$

Les formules (4.10) et (4.11) sont respectivement la transformée de Fourier discrète directe et inverse. On pose $\eta_x = N_x/2$ et $\theta_x = 0$ si N_x est pair, et $\eta_x = (N_x - 1)/2$ et $\theta_x = 1$ si N_x est impaire. De même on pose $\eta_v = N_v/2$ et $\theta_v = 0$ si N_v est pair, et $\eta_v = (N_v - 1)/2$ et $\theta_v = 1$ si N_v est impaire. Au lieu de faire varier ω_x (resp. ω_v) de 0 à N_x (resp. N_v), ω_x (resp. ω_v) varie de $-\eta_x$ (resp. $-\eta_v$) à $\eta_x + \theta_x$ (resp. $\eta_v + \theta_v$). Pour simplifier les notations, sans perte de généralité N_x et N_v sont supposés pairs. On utilise les notations

$$\sum_{|\omega| \leq N/2} = \sum_{|\omega_x| \leq N_x/2} \sum_{|\omega_v| \leq N_v/2} = \sum_{\omega_x = -N_x/2}^{N_x/2} \sum_{\omega_v = -N_v/2}^{N_v/2}.$$

Soit α et β les vecteurs réels respectifs $(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{N_v})$ et $(\beta_0, \dots, \beta_i, \dots, \beta_{N_x})$ avec $0 \leq \alpha_j, \beta_i \leq 1$, $\forall (i, j) \in [0, N_x] \times [0, N_v]$. On définit la norme $\|\cdot\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, \beta}}$ par

$$\|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, \beta}} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{(i,j) \in \mathcal{M}_h} |f_{i+\alpha_j, j+\beta_i}|^2 \right)^{1/2},$$

où

$$f_{i+\alpha_j, j+\beta_i} := f(x_i + \alpha_j \Delta x, v_j + \beta_i \Delta v), \quad (i, j) \in [0, N_x] \times [0, N_v].$$

Dans la suite on fixe le temps final à T et on considère une discrétisation uniforme en temps $\{t^n\}_{n \leq N_T}$ de l'intervalle $[0, T]$ avec un pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. On cherche une approximation $f_h(t^n, x_i, v_j)$ de la fonction de distribution exacte $f(t^n, x_i, v_j)$ aux points $(x_i, v_j) \in \mathcal{M}_h$ et au temps $t^n = n \Delta t$. La fonction approchée $f_h(t^n)$ est alors évaluée sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$ en utilisant l'opérateur d'interpolation \mathcal{R}_h défini sur des grilles uniformes

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h : L^2(\Omega) \cap \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \cap \mathcal{P}(\Omega) \\ f &\longrightarrow \mathcal{R}_h f = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} f_{i,j} \psi_{i,j}, \end{aligned}$$

où $\{\psi_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ sont les fonctions de bases. Afin d'obtenir un schéma convergent, l'opérateur d'interpolation \mathcal{R}_h doit satisfaire certaines propriétés de stabilité et d'approximation d'ordre élevé que l'on détaillera plus tard. Comme exemples pour \mathcal{R}_h on prendra des B-splines d'ordre quelconque et des polynômes de Lagrange symétriques de degré quelconque [34].

4.2.3.2 Le schéma numérique

On définit ici l'opérateur champ électrique, pour une fonction à valeur réelle $g \in L^1([0, L] \times \mathbb{R})$, par

$$E(g, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} g(y, v) dv - 1 \right),$$

et les opérateurs de transport dans la direction x , \mathcal{T}_1 et $\widetilde{\mathcal{T}}_1$, par

$$\mathcal{T}_1 f(t, x, v) = f(t, x - v \Delta t / 2, v), \quad f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$$

et

$$\widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t, x, v) = \mathcal{R}_h \circ \mathcal{T}_1 f(t, x, v) = \mathcal{R}_h f(t, x - v \Delta t / 2, v).$$

Soit \tilde{g} une fonction de $L^1([0, L] \times \mathbb{R})$, qui nous permet de définir l'opérateur de transport dans la direction v , $\mathcal{T}_2(\cdot, \cdot)$, dont l'action sur la fonction g est donnée par

$$\mathcal{T}_2(g, \tilde{g}) = g(x, v - E(\tilde{g}, x) \Delta t).$$

Pour l'analyse de convergence on introduit trois autres opérateurs de transport \mathcal{T}_2 , $\widetilde{\mathcal{T}}_2$, et $\widetilde{\mathcal{T}}_2^*$:

$$\mathcal{T}_2 g = \mathcal{T}_2(g, g), \quad \widetilde{\mathcal{T}}_2 g = \mathcal{R}_h \circ \mathcal{T}_2(g, \mathcal{T}_1 f) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathcal{T}}_2^* g = \mathcal{R}_h \circ \mathcal{T}_2(g, \widetilde{\mathcal{T}}_1 f_h).$$

Le schéma de discrétisation en temps est basé sur une décomposition à la Strang de l'opérateur de transport global en deux opérateurs de transport de dimension moins élevée, l'un dans l'espace physique et l'autre dans l'espace des vitesses. A chacun de ces opérateurs de transport on peut associer des équations différentielles ordinaires du premier ordre que l'on peut intégrer analytiquement. En supposant que l'on connaît $f_h(t^n)$ au temps t^n , le schéma numérique se décompose en plusieurs étapes :

S1 : On calcule la première demi-advection arrière dans la direction x d'un incrément $(v\Delta t/2)$: à chaque point de $(x, v) \in \mathcal{M}_h$, $f_h(t^n, x - v\Delta t/2, v)$ est évaluée. La nouvelle approximation est donnée par

$$f_h^\dagger(t^n) = \widetilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n).$$

S2 : La nouvelle approximation du champ électrique, estimée à partir de la solution précédente, est donnée par

$$E_h(t^{n+1/2}, x) = E(f_h^\dagger(t^n), x).$$

S3 : On calcule l'advection arrière dans la direction v d'un incrément $(\Delta t E(f_h^\dagger(t^n), x))$: en chaque point $(x, v) \in \mathcal{M}_h$, $f_h^\ddagger(t^n, x, v - E(f_h^\dagger(t^n), x)\Delta t)$ est évaluée. La nouvelle approximation est donnée par

$$f_h^\ddagger(t^n) = \widetilde{\mathcal{T}}_2^* f_h^\dagger(t^n)$$

S4 : On répète l'étape (S1) et la nouvelle approximation au temps t^{n+1} est donnée par

$$f_h(t^{n+1}) = \widetilde{\mathcal{T}}_1 f_h^\ddagger(t^n).$$

Le schéma numérique peut se résumer ainsi

$$f_h(t^{n+1}, x, v) = \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, x, v),$$

avec $f_h^0 = \mathcal{R}_h f_0$, une discrétisation de la condition initiale f_0 . Les conditions aux limites sont $f_h^n(x + L, v) = f_h^n(x, v)$, $\forall |v| \leq R$, $\forall x \in [0, L]$ dans la direction x et $f_h^n(x, v) = 0$, $\forall |v| > R$, $\forall x \in [0, L]$ dans la direction v .

4.2.4 Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori

Ici on énonce le théorème qui établit la convergence et les estimations d'erreurs a priori.

Théorème 12 *On suppose que $f_0 \in W_{c, \text{per}_x}^{m+1, \infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, est positive, périodique en x de période L , et à support compact en vitesse. En outre on suppose que l'opérateur d'interpolation \mathcal{R}_h satisfait les propriétés*

i) *Consistance et précision d'ordre élevé : soit m , p et k des entiers tels que $m \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ et $0 \leq k \leq 1$. Alors l'estimation d'erreur d'interpolation suivante est satisfaite*

$$\|f - \mathcal{R}_h f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq Ch^{m+1-k} \|f\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad \forall f \in W^{m+1,p}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\Omega). \quad (4.12)$$

ii) *Stabilité : Soit f appartenant à l'espace $\mathcal{C}(\Omega) \cap \mathcal{P}(\Omega)$. On a alors*

$$c \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\mathcal{R}_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_h^2(\Omega)}, \quad (4.13)$$

où, c et C sont des constantes indépendantes de h , et

$$\|\mathcal{R}_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, \beta}} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)}, \quad \|\mathcal{R}_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)}. \quad (4.14)$$

Alors l'approximation numérique (f_h, E_h) de la solution du système de Vlasov-Poisson présentée dans le paragraphe 4.2.3.2 converge vers la solution (f, E) du système de Vlasov-Poisson périodique et il existe une constante $C = C(\|f\|_{W^{2,\infty}(0,T;W^{m+1,\infty}(\Omega))})$ indépendante de Δt et h telle que

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

.

Remarque 2 Pour l'opérateur d'interpolation \mathcal{R}_h on considérera des B-splines d'ordre m quelconque et des polynômes de Lagrange symétriques de degré m quelconque [34].

Preuve. La preuve complète de ce théorème se trouve dans [34]. Afin d'appliquer une inégalité de Grönwall discrète on exprime l'erreur globale au temps t^{n+1} définie par

$$e^{n+1} = \|f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)\|_{L_h^2(\Omega)},$$

en fonction de e^n . On décompose alors la différence $f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)$ en quatre termes

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v) &= \left(f(t^{n+1}, x, v) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \right) \\ &\quad + \left(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \right) \\ &\quad + \left(\widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t^n, x, v) \\ &\quad + \left(\widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n, x, v) - f_h(t^n, x, v)) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre correspond à une erreur de discrétisation en temps, le second terme correspond à une erreur de discrétisation dans l'espace des phases et le troisième terme est une erreur de couplage liée à l'auto-cohérence. Le dernier terme du second membre est une erreur d'accumulation et constitue la partie la plus délicate de la preuve car elle fait intervenir les propriétés fines de stabilité L^2 de l'opérateur d'interpolation \mathcal{R}_h . ■

4.3 Méthodes semi-Lagrangiennes pour le système de Vlasov-Einstein

4.3.1 Introduction

Dans cette section on présente une méthode semi-Lagrangienne pour résoudre le système de Vlasov-Einstein en coordonnées de Schwarzschild dans le cas où l'espace-temps est asymptotiquement plat et à symétrie sphérique. Ce modèle est fréquemment utilisé en astrophysique pour modéliser la formation de trous noirs sphériques par effondrement gravitationnel d'une étoile isolée. Le problème de Cauchy pour le système de Vlasov-Einstein asymptotiquement plat à symétrie sphérique en coordonnées de Schwarzschild a été étudié par Rein et Rendall [189] où ils prouvent en particulier que pour des conditions initiales assez petites il existe des solutions classiques globales. Le cas d'une donnée initiale régulière générale reste ouvert. Un critère pour prolonger l'existence locale des solutions et donc obtenir des solutions classiques globales a été donné dans [192, 5].

Bien connues en physique des plasmas depuis les années soixantes, les méthodes Lagrangiennes appelées méthodes PIC (Particle-In-Cell) et leurs variantes sont les plus populaires dans la communauté astrophysique [199, 200, 201, 193, 64, 191, 65, 66]. Dans [191] une étude numérique des phénomènes d'effondrement critique a été entreprise avec le modèle de Vlasov-Einstein en coordonnées de Schwarzschild dans le cadre d'un espace-temps asymptotiquement plat ayant la symétrie sphérique. Ces résultats numériques sont fondés sur une méthode PIC

dont l'analyse de convergence a été réalisée par Rein et Rodewis [193]. L'étude des phénomènes d'effondrement critique pour lesquels il n'y a aucun résultat théorique a commencé avec le travail de Choptuik [64]. Dans [6, 66] les auteurs ont entrepris l'étude numérique de la stabilité des états stationnaires afin d'étudier les phénomènes d'effondrement critique. Ces simulations numériques présentent les résultats intéressants suivants. Si on sait calculer un état stationnaire f_s [190] alors on peut considérer la famille de conditions initiales Af_s . L'étude numérique de la transition entre la dispersion de la matière et son effondrement gravitationnel [191] a montré qu'il existe un saut de masse lorsqu'on trace la courbe $A \rightarrow M(A)$ où M est la masse ADM. Ces résultats ont été confirmés dans [66]. Dans [6], les auteurs choisissent des états stationnaires qui dépendent de manière particulière de l'énergie des particules et du moment angulaire. Si on désigne par Z_c le décalage vers le rouge et Z_{crit} la valeur critique de Z_c qui maximise une énergie de liaison E_b , alors leurs résultats numériques peuvent se résumer de la manière suivante. En perturbant un état stationnaire instable avec $Z_c > Z_{crit}$ et $A > 1$ on obtient un effondrement gravitationnel et un trou noir. Si on perturbe un état stationnaire instable avec $E_b < 0$ et $A < 1$ la matière se disperse. Dans les deux autres cas stables $Z_c < Z_{crit}$ et $A > 1$ ou $E_b > 0$ et $A < 1$, la perturbation d'un état stationnaire instable conduit à un comportement oscillatoire. Pour plus d'information sur les phénomènes d'effondrement critique on peut consulter [137, 138].

Il y a plusieurs bonnes raisons de penser que les méthodes semi-Lagrangienne peuvent présenter des avantages par rapport aux méthodes PIC et fournir un outil utile pour la communauté astrophysique. Puisque les phénomènes d'effondrement critique sont pertinents en relativité générale cela vaut la peine de développer des schémas différents pour voir si ces schémas confirment les résultats précédents ou s'ils délivrent de nouveaux phénomènes. Comme il a été noté dans [66], où des méthodes PIC sont utilisées, le développement de codes qui résolvent l'équation de Vlasov directement dans l'espace des phases serait le meilleur moyen d'obtenir des résultats précis puisque les propriétés de convergence d'ordre élevé de ces schémas sont mieux contrôlées et comprises. Pour les schémas semi-Lagrangiens on peut consulter les références [30, 35, 34]. En fait les méthodes PIC ont l'inconvénient de décrire avec très peu de précision les processus d'accélération de particules. Cela est dû au fait que les méthodes PIC manquent de particules numériques pour bien représenter en détail la structure de la fonction de distribution dans des régions de l'espace des phases où a lieu l'interaction résonante onde-particule non linéaire; ce qui peut modifier les propriétés du transport. En effet il est bien connu [110, 215, 216, 198, 121, 193] que le bruit numérique inhérent aux méthodes PIC décroît en $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ où N est le nombre de particule. D'un autre côté, la résolution directe de l'équation de Vlasov sur une grille de l'espace des phases est devenue un outil puissant pour étudier en détail la dynamique des particules parce qu'elle offre une résolution fine de l'espace des phases [62, 29, 36, 10] qui est assurée en chaque point de l'espace des phases par des estimations d'erreurs a priori. Les codes Vlasov fournissent une bonne description des forts gradients et des petites échelles qui se développent dans l'espace des phases, bien que le mécanisme de filamentation et de mélange de l'espace des phases finissent par être saturés par la dissipation numérique. En effet il existe un temps au-delà duquel la grille devient trop grossière pour suivre ces forts gradients ou ces fins filaments. De plus ces mécanismes sont amplifiés par les effets relativistes via la forte accélération des particules. Dans [6] il a été souligné que la solution peut devenir de plus en plus piquée en certains points et donc une grille très fine autour de ces points doit être utilisée pour bien approcher ces pics très abrupts. Comme dans [6] les auteurs n'utilisent pas de maillage adaptatif, et que les solutions deviennent de plus en plus piquée en même temps que ces pics se déplacent, la précision de la grille n'est plus suffisante après un certain temps pour bien décrire l'effondrement. Un moyen pour suivre la solution plus loin en temps est de considérer des schémas numériques adaptatifs. Puisque notre schéma est basé sur une analyse multi-résolution, il peut être facilement modifié pour obtenir un schéma adaptatif en ajoutant une étape de prédiction (qui consiste à prédire le nouveau maillage où sera calculée la solution, en avançant les courbes caractéristiques en avant) avant de résoudre les caractéristiques en arrière et une étape de décomposition en ondelettes et de compression. Cette procédure suit ce qui a été fait dans [36]. En fait dans [36] on a mis au point un schéma semi-Lagrangien adaptatif basé sur une analyse multi-résolution en ondelettes pour

résoudre le système de Vlasov-Maxwell réduit (VMR). Le modèle VMR présente beaucoup de similarités avec le système de Vlasov-Einstein réduit (VER). En effet les deux systèmes sont à deux dimensions dans l'espace des phases ((r, w) pour VER et (x, v_x) pour VMR) et chaque fonction de distribution est paramétrée par un invariant, le moment angulaire pour VER et le moment canonique transverse pour VMR. La différence entre ces deux modèles vient du champ de vecteurs qui génère le flot Lagrangien, et l'équation des champs (champ électromagnétique versus champ gravitationnel ou coefficients de la métrique).

Dans un prochain travail on compte modifier le schéma implémenté dans [36], selon le schéma semi-Lagrangien décrit ici pour obtenir un schéma adaptatif semi-Lagrangien qui soit capable de résoudre le système de Vlasov-Einstein dans le cas d'un espace-temps asymptotiquement plat et à symétrie sphérique. Par conséquent ce schéma adaptatif pourrait être un outil puissant pour traiter les forts gradients et les pics abrupts mobiles qui se développent fréquemment lors d'un effondrement gravitationnel.

4.3.2 Le problème continu

On considère un ensemble de particules relativistes de même masse au repos, normalisée à l'unité, représenté par une fonction distribution statistique positive f définie sur l'espace des phases

$$PM = \{g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = -1, \quad p^0 > 0\}, \quad \alpha, \beta = 0, \dots, 3,$$

qui est une sous-variété de dimension sept du fibré tangent TM de la variété espace-temps M munie du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$. La définition de PM assure que les particules se déplacent vers le futur. En utilisant les coordonnées canoniques de l'espace des phases (t, x^a, p^b) , $a, b = 1, \dots, 3$ sur le fibré tangent TM , le système de Vlasov-Einstein s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p^a}{p^0} \frac{\partial f}{\partial x^a} - \frac{1}{p^0} \Gamma_{\beta\alpha}^a p^\beta p^\alpha \frac{\partial f}{\partial p^a} &= 0, \\ G^{\alpha\beta} &= 8\pi T^{\alpha\beta}, \\ T^{\alpha\beta} &= \int p^\alpha p^\beta f |g|^{1/2} \frac{dp^1 dp^2 dp^3}{-p^0}, \end{aligned}$$

où $\Gamma_{\beta\alpha}^a$ sont les symboles de Christoffel, $|g|$ le déterminant de la métrique, $G^{\alpha\beta}$ le tenseur d'Einstein, $T^{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie-impulsion et $p^0 = \sqrt{-g^{00}} \sqrt{1 + g_{ab} p^a p^b}$ (définition de PM) [4]. Toutes les constantes physiques sont normalisées à l'unité. Comme on s'intéresse ici à un espace-temps asymptotiquement plat et à symétrie sphérique, on utilise la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = -e^{2\mu(t,r)} dt^2 + e^{2\lambda(t,r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.15)$$

où $t \geq 0$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Les hypothèses d'espace asymptotiquement plat s'expriment par

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(t, r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mu(t, r) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.16)$$

De plus on suppose que

$$\lambda(t, 0) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.17)$$

Afin de définir un système de coordonnées sur PM et écrire l'équation de Vlasov-Einstein on utilise les coordonnées sphériques $x = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ et on définit une base de \mathbb{R}^3 par $e_i^j = \delta_{ij} + (e^{-\lambda} - 1)x^j \delta_{ik} x^k / r^2$ pour représenter l'impulsion. Dans cette base un vecteur de \mathbb{R}^3 est représenté non pas par ses coordonnées canoniques p^a mais par les coordonnées v^i . Puisque $p^a = e_i^a v^i$, alors $v^a = p^a + (e^\lambda - 1)x^a \delta_{bc} x^b p^c / r^2$. Dans la suite on notera $a \cdot b$ le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^3 , $|a|$ la longueur Euclidienne de a dans \mathbb{R}^3 , $\dot{\lambda}$ la dérivée partielle de λ par rapport à la variable t , et λ' la dérivée partielle de λ par rapport à la variable r . Le système de Vlasov-Einstein en symétrie sphérique prend la forme

$$\partial_t f + e^{\mu-\lambda} \frac{v}{\gamma} \cdot \nabla_x f - \left(\dot{\lambda} \frac{x \cdot v}{r} + e^{\mu-\lambda} \mu' \gamma \right) \frac{x}{r} \cdot \nabla_v f = 0, \quad (4.18)$$

$$e^{-2\lambda}(2r\lambda' - 1) + 1 = 8\pi r^2 \rho, \quad (4.19)$$

$$e^{-2\lambda}(2r\mu' + 1) - 1 = 8\pi r^2 p, \quad (4.20)$$

où le facteur relativiste γ s'écrit

$$\gamma = \sqrt{1 + |v|^2},$$

la densité de masse-énergie ρ et la densité de pression radiale p sont définies par

$$\rho(t, r) = \rho(t, x) = \int \gamma f(t, x, v) dv, \quad (4.21)$$

$$p(t, r) = p(t, x) = \int \left(\frac{x \cdot v}{r} \right)^2 f(t, x, v) \frac{dv}{\gamma}. \quad (4.22)$$

En fait les équations (4.19) et (4.20) constituent un sous-ensemble des équations d'Einstein mais il a été prouvé dans [189] que le système réduit de Vlasov-Einstein (4.18)-(4.20) était bien équivalent au système de de Vlasov-Einstein complet lorsqu'on prend la métrique de Schwarzschild (4.15). Une relation redondante mais utile est l'équation

$$\dot{\lambda} = -4\pi r e^{\lambda+\mu} j, \quad (4.23)$$

où la densité de courant de masse radial est définie par

$$j(t, r) = j(t, x) = \int \frac{x \cdot v}{r} f(t, x, v) dv. \quad (4.24)$$

De plus, on choisit une condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v),$$

où f_0 est à symétrie sphérique, positive, continûment différentiable, à support compact, et telle que

$$\int_{|x| \leq r} \int_v \gamma f_0(x, v) dv dx < \frac{r}{2}, \quad r \geq 0. \quad (4.25)$$

L'existence d'invariants permet de réduire la dimension de l'espace des phases. Ici l'invariant est le carré moment angulaire, $\ell = |x \times v|^2 = x^2 v^2 - (x \cdot v)^2$. Si on introduit les nouvelles variables $r = |x|$, $w = \frac{x \cdot v}{r}$, et ℓ on obtient alors l'équation de Vlasov à deux dimensions

$$\partial_t f + e^{\mu-\lambda} \frac{w}{\gamma} \partial_r f + \left(-\dot{\lambda} w - e^{\mu-\lambda} \mu' \gamma + e^{\mu-\lambda} \frac{\ell}{r^3 \gamma} \right) \partial_w f = 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{R}_+ \quad (4.26)$$

où γ s'écrit $\gamma = \sqrt{1 + w^2 + \frac{\ell}{r^2}}$ et $f = f(t, r, w, \ell)$. Les équations pour les coefficients de la métrique (4.19)-(4.20) et (4.23) demeurent et les définitions des termes sources deviennent

$$\rho(t, r) = \frac{\pi}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \gamma f(t, r, w, \ell) d\ell dw, \quad (4.27)$$

$$p(t, r) = \frac{\pi}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w^2 f(t, r, w, \ell) \frac{d\ell dw}{\gamma}, \quad (4.28)$$

$$j(t, r) = \frac{\pi}{r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w f(t, r, w, \ell) d\ell dw. \quad (4.29)$$

Finalement la condition (4.25) se réécrit

$$4\pi^2 \int_{\varrho \leq r} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \gamma f_0(\varrho, w, \ell) d\varrho dw d\ell < \frac{r}{2}, \quad r \geq 0. \quad (4.30)$$

Dans la suite on utilisera la notation $z = (r, w, \ell)$. On désigne par $Z(s; t, z) = (R, W, L)(s; t, r, w, \ell)$ la solution du système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre

$$\frac{dR}{ds}(s) = F_r(s, Z(s)) = e^{(\mu-\lambda)(s, R(s))} \frac{W(s)}{\gamma(Z(s))}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{ds}(s) = F_w(s, Z(s)) &= -\dot{\lambda}(s, R(s)) W(s) - e^{(\mu-\lambda)(s, R(s))} \mu'(s, R(s)) \gamma(Z(s)) \\ &+ e^{(\mu-\lambda)(s, R(s))} \frac{L(s)}{R^3(s) \gamma(Z(s))}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\frac{dL}{ds}(s) = F_\ell(s, Z(s)) = 0, \quad (4.33)$$

avec la condition initiale $Z(t; t, z) = z$ et $z = (r, w, \ell) \in Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Si on pose $F = (F_r, F_w, F_\ell)$ le champ de vecteurs qui définit le flot Lagrangien $Z(s; t, z)$, alors le système (4.31)-(4.33) peut s'écrire de manière compacte

$$\frac{dZ}{ds}(s) = F(s, Z(s)). \quad (4.34)$$

L'équation de Vlasov (4.26), qui exprime que la fonction de distribution reste constante le long des courbes intégrales du champ de vecteurs F est équivalente à

$$f(t, r, w, \ell) = f(s, (R, W, L)(s; t, r, w, \ell)) = f(s, Z(s; t, z)). \quad (4.35)$$

Notons que la quantité L est conservée le long des caractéristiques, ce qui signifie que le système (4.31)-(4.33) est essentiellement à deux dimensions. Les équations de la métrique peuvent être résolues explicitement pour les coefficients de la métrique μ et λ ainsi que leurs dérivées. En intégrant (4.19) avec la condition aux limites (4.17) on obtient

$$e^{-2\lambda(t,r)} = 1 - \frac{2m(t,r)}{r}, \quad (4.36)$$

où

$$m(t,r) = 4\pi \int_0^r s^2 \rho(t,s) ds. \quad (4.37)$$

Notons que l'hypothèse (4.30) garantit la positivité du second membre de l'équation (4.36) et que la masse $m(t, \infty)$ (appelée masse ADM) est conservée. En réécrivant l'équation (4.20) on obtient

$$\mu'(t,r) = e^{2\lambda(t,r)} \left(\frac{m(t,r)}{r^2} + 4\pi r \rho(t,r) \right), \quad (4.38)$$

et en utilisant la condition aux limites (4.16) on obtient

$$\mu(t,r) = - \int_r^\infty \mu'(t,s) ds. \quad (4.39)$$

De plus à partir de (4.19) on peut extraire l'expression suivante pour λ'

$$\lambda'(t,r) = e^{2\lambda(t,r)} \left(-\frac{m(t,r)}{r^2} + 4\pi r \rho(t,r) \right). \quad (4.40)$$

Alors que la distribution f est constante le long des courbes caractéristiques, le flot Lagrangien ne préserve pas le volume de l'espace des phases et plus précisément on a

Lemme 1 *Soit $Z(\cdot; t, z) = (R, W, L)(\cdot; t, r, w, \ell)$, les courbes caractéristiques associées à l'équation (4.26) avec $Z(t; t, z) = z \in Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a alors*

$$\det \frac{\partial Z}{\partial z}(s; t, z) = e^{\lambda(t,r) - \lambda(s, R(s; t, z))}.$$

Une conséquence immédiate est que la quantité

$$4\pi^2 \int e^{\lambda(t,r)} f(t, r, w, \ell) dr dw d\ell$$

associée au nombre de particule est conservée. Le système de (4.26) peut alors s'écrire sous sa forme conservative

$$\partial_t(e^\lambda f) + \partial_r(F_r e^\lambda f) + \partial_w(F_w e^\lambda f) = 0,$$

puisque le Jacobien du flot Lagrangien satisfait la condition $\partial_t(e^\lambda) + \partial_r(F_r e^\lambda) + \partial_w(F_w e^\lambda) = 0$.

On rappelle maintenant un résultat d'existence pour le système de Vlasov-Einstein en coordonnées de Schwarzschild dans le cas d'un espace-temps asymptotiquement plat et à symétrie sphérique.

Théorème 13 *On suppose que f_0 est positive, à symétrie sphérique, à support compact, qu'elle appartient à l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^6) \cap H^m(\mathbb{R}^6)$ avec $m \geq 5$, et qu'elle satisfait la condition (4.25), alors il existe une solution unique, régulière, à symétrie sphérique, à support compact, appartenant à l'espace $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^6) \cap H_{\text{loc}}^m([0, T] \times \mathbb{R}^6)$ qui satisfait le système de Vlasov-Einstein (4.18) sur $[0, T]$ avec $f(0, x, v) = f_0(x, v)$. De plus on a $\rho, p, j \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}_+)$ et $m, \lambda, \mu \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R}_+)$.*

Preuve. On peut consulter la référence [189] pour une preuve dans l'ensemble des fonctions continûment différentiables et [63] pour une preuve dans les espaces de Sobolev. ■

4.3.3 Le problème discret

Soit Ω (resp. Ω_r) le domaine de l'espace des phases (resp. la composante radiale du domaine de l'espace des phases) sur lequel on souhaite calculer la solution et \mathcal{M}_h une partition de Ω où h désigne la taille maximale des éléments du maillage \mathcal{M}_h . On introduit l'espace de Sobolev H^m muni de la norme

$$\|f\|_{H^m} = \left(\int_{\mathbb{R}^3_\xi} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

où \widehat{f} désigne la transformée de Fourier de f .

Afin de construire notre schéma on introduit l'opérateur d'approximation (interpolation) Π_h défini sur H^m , $m \in \mathbb{N}$. On considère une suite d'espace de dimension fini $V_h \subset H^m$ tel que $\overline{\bigcup_{h \geq 0} V_h} = H^m$. Si la suite $\{\Psi_k\}$ est une base V_h , on alors

$$\begin{aligned} \Pi_h : H^m(\Omega) &\longrightarrow V_h \\ f &\longrightarrow \Pi_h f = \sum_k c_k \Psi_k. \end{aligned}$$

En outre, on fait les hypothèses suivantes sur Π_h :

Hypothèses 1 *Soit $g \in H^m(\Omega)$, et $p, k, m \in \mathbb{N}$ avec $k \leq m$ et $\alpha \in [0, 1]$, alors*

i) *Régularité :*

$$\Pi_h g \in \mathcal{C}^{p, \alpha}(\Omega) \cap H^k(\Omega). \quad (4.41)$$

ii) *Consistance et précision :*

$$\|\Pi_h g - g\|_{H^k(\Omega)} \leq ch^{m-k} \|g\|_{H^m(\Omega)}. \quad (4.42)$$

iii) *Stabilité :*

$$\|\Pi_h g\|_{H^k(\Omega)} \leq \|g\|_{H^k(\Omega)}. \quad (4.43)$$

De plus on utilise l'inégalité inverse suivante [71] : il existe une constante $K_1 > 0$ indépendante de h telle que

$$\forall v_h \in V_h, \quad \|v_h\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq K_1 h^{-1} \|v_h\|_{H^m(\Omega)}. \quad (4.44)$$

Un tel opérateur existe et un exemple sera donné dans le cas de l'analyse multi-résolution par ondelettes. Dans la suite on présente un schéma d'ordre un en temps puis un schéma d'ordre deux en temps. Si T désigne le temps final d'évolution et $N_T \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'itérations en temps, alors on définit le pas de temps $\Delta t = T/N_T$ et l'instant $t^n = n\Delta t$. On suppose que l'on connaît $f_h^n \in V_h$, une approximation de la fonction de distribution f sur \mathcal{M}_h au temps $t = t^n$, alors le schéma numérique décrit les étapes pour obtenir f_h^{n+1} à partir de f_h^n .

4.3.3.1 Schéma d'ordre un en temps

Puisque f est constante le long des courbes caractéristiques (4.35) on définit

$$f_h^{n+1}(r, w, \ell) := \Pi_h f_h^n(R_h(t^n), W_h(t^n), L_h(t^n)) \quad (4.45)$$

où $Z_h(t^n) = (R_h(t^n), W_h(t^n), L_h(t^n))$ est une approximation du système (4.31)-(4.33) avec la condition initiale $Z_h(t^{n+1}) = (R_h(t^{n+1}), W_h(t^{n+1}), L_h(t^{n+1})) = (r, w, \ell) = z \in \mathcal{M}_h$.

Pour le schéma d'ordre un en temps, en utilisant la notation $Z_h^n = Z_h(t^n)$, on définit

$$Z_h^{n+1} - Z_h^n = \Delta t F_h^n(Z_h^n) \quad (4.46)$$

où $F_h^n = (F_{h,r}^n, F_{h,w}^n, F_{h,\ell}^n)$ est obtenu en remplaçant dans $F(t, \cdot)$, les quantités $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\mu'(t)$ et $\dot{\lambda}(t)$ au temps $t = t^n$ par leurs approximations λ_h^n , μ_h^n , $\mu_h^{n'}$ et $\dot{\lambda}_h^n$. Les coefficients métriques λ_h^n , μ_h^n , $\mu_h^{n'}$, $\dot{\lambda}_h^n$ et la masse m_h^n sont construits en remplaçant dans les équations (4.23) et (4.36)-(4.39), les moments $\rho(t)$, $p(t)$, et $j(t)$ par leurs approximations ρ_h^n , p_h^n et j_h^n , où ces dernières sont calculées en remplaçant dans les définitions des moments (4.27)-(4.29), la fonction de distribution $f(t^n)$ par f_h^n .

4.3.3.2 Schéma d'ordre deux en temps

On présente maintenant le schéma d'ordre deux en temps qui consiste à appliquer successivement deux fois le schéma d'ordre un en temps.

1) Si on suppose que l'on connaît $f_h^n \in V_h$ on pose alors

$$f_h^{n+1/2}(r, w, \ell) := \Pi_h f_h^n(\widehat{R}_h(t^n), \widehat{W}_h(t^n), \widehat{L}_h(t^n)) \quad (4.47)$$

où $\widehat{Z}_h(t^n) = (\widehat{R}_h(t^n), \widehat{W}_h(t^n), \widehat{L}_h(t^n))$ est une approximation de la solution du système (4.31)-(4.33) avec la condition initiale $\widehat{Z}_h(t^{n+1/2}) = (\widehat{R}_h(t^{n+1/2}), \widehat{W}_h(t^{n+1/2}), \widehat{L}_h(t^{n+1/2})) = (r, w, \ell) = z \in \mathcal{M}_h$. Les inconnues $\widehat{Z}_h(t^n)$ sont calculées en utilisant l'approximation

$$\widehat{Z}_h^{n+1/2} - \widehat{Z}_h^n = \frac{\Delta t}{2} F_h^n(\widehat{Z}_h^n). \quad (4.48)$$

2) A partir de la fonction de distribution $f_h^{n+1/2}$ et des équations (4.27)-(4.29), on obtient les moments $\rho_h^{n+1/2}$, $p_h^{n+1/2}$ et $j_h^{n+1/2}$. En utilisant les équations (4.23) et (4.36)-(4.39) on obtient $\lambda_h^{n+1/2}$, $\mu_h^{n+1/2}$, $\mu_h^{n+1/2'}$ et $\dot{\lambda}_h^{n+1/2}$ et par conséquent on peut construire $F_h^{n+1/2}$.

3) On pose alors

$$f_h^{n+1}(r, w, \ell) := \Pi_h f_h^n(R_h(t^n), W_h(t^n), L_h(t^n)) \quad (4.49)$$

où $Z_h(t^n) = (R_h(t^n), W_h(t^n), L_h(t^n))$ est une approximation de la solution du système (4.31)-(4.33) avec la condition initiale $Z_h(t^{n+1}) = (R_h(t^{n+1}), W_h(t^{n+1}), L_h(t^{n+1})) = (r, w, \ell) = z \in \mathcal{M}_h$. Les nouvelles inconnues $Z_h(t^n)$ sont approchées en utilisant l'approximation

$$Z_h^{n+1} - Z_h^n = \Delta t F_h^{n+1/2}(Z_h^{n+1/2}) \quad (4.50)$$

où on définit $Z_h^{n+1/2} = (Z_h^{n+1} + Z_h^n)/2$.

4.3.3.3 Analyse multi-résolution de H^s en ondelettes

Dans ce paragraphe on présente l'opérateur d'approximation qui permettra de reconstruire la fonction de distribution en tout point de l'espace des phases Ω . Soit s un nombre réel. Une analyse multi-résolution de $H^s(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés V_j , $j \in \mathbb{Z}$, de $H^s(\mathbb{R})$, telle que

- $V_j \subset V_{j+1}$,
- $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = H^s(\mathbb{R})$,
- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$,
- Pour tout j , il existe une fonction $\varphi^{(j)}$ telle que les fonctions $\varphi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \varphi^{(j)}(2^j x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, forment une base orthonormée de V_j .

On peut alors construire un espace W_j , le complément orthogonal de V_j dans V_{j+1} ($V_{j+1} = W_j \oplus V_j$, $W_j \perp W_l$ si $j \neq l$). Il existe alors une base orthonormale de W_j formée par les fonctions $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi^{(j)}(2^j x - k)$. Par conséquent les espaces V_j et H^s peuvent se décomposer respectivement comme $V_j = V_{j^0} \bigoplus_{i=j^0}^{j-1} W_i$ et $H^s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$. Si P_j est l'opérateur de projection orthogonale de H^s sur V_j alors pour toute fonction $f \in H^s(\mathbb{R})$ on a

$$P_{j+1}f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_s \psi_{j,k} = \sum_{k \leq j} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{k,l} \rangle_s \psi_{k,l}.$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ désigne le produit scalaire dans H^s . Dans [9], les auteurs montrent qu'on peut construire une analyse multi-résolution de H^s où la base orthonormale est formée d'ondelettes $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ à support compact avec la régularité souhaitée. L'opérateur de projection orthogonale P_j associé, reproduit tous les polynômes de degré inférieur ou égal à un certain degré fixé, c'est-à-dire qu'il satisfait les propriétés d'approximation d'ordre élevé. Dans la suite on utilisera la notation Π_h pour P_j où $h = 2^{-j}$. Une analyse multi-résolution de $H^s(\mathbb{R}^n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ se construit directement par produit tensoriel des espaces V_j ou/et W_j et des fonctions de base $\varphi_{j,k}$ et/ou $\psi_{j,k}$. En fait l'analyse multi-résolution de H^s hérite des propriétés classiques de l'analyse multi-résolution de L^2 . La différence est que pour l'analyse multi-résolution de H^s , les fonctions d'échelles dépendent du niveau d'approximation j alors que pour l'analyse multi-résolution de L^2 ce n'est pas le cas, c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une fonction d'échelle (resp. ondelette) mère et que les autres se déduisent par dilatation de la fonction mère. La dépendance en j pour l'analyse multi-résolution de H^s , provient du fait que l'espace H^s n'est pas invariant par dilatation.

4.3.4 Théorèmes de convergence et estimations d'erreurs a priori

Dans cette section on présente deux théorèmes de convergence pour les méthodes numériques décrites dans le paragraphe 4.3.3.

Théorème 14 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et que la condition (4.30) soit satisfaite. De plus on suppose qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telle que $C_1 \leq h^{-1} \Delta t \leq C_2$, alors l'approximation (f_h, λ_h, μ_h) du système de Vlasov-Einstein présentée 4.3.3.1 où Π_h est le projecteur orthogonal d'une analyse multi-résolution en ondelettes de H^3 , converge vers la solution du théorème 13 sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et pour $k \leq 1$, on a les estimations d'erreurs a priori*

$$\begin{aligned} \sup_{n \leq N_T} \|f_h^n - f(t^n)\|_{H^k(\Omega)} &\lesssim \Delta t + \frac{h^{m-k}}{\Delta t} \\ \sup_{n \leq N_T} \{ \|\lambda_h^n - \lambda(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)}, \|\mu_h^n - \mu(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)}, \|m_h^n - m(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)} \} &\lesssim \Delta t + \frac{h^m}{\Delta t} \\ \sup_{n \leq N_T} \{ \|\rho_h^n - \rho(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)}, \|p_h^n - p(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)}, \|j_h^n - j(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)} \} &\lesssim \Delta t + \frac{h^{m-k}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Théorème 15 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et que la condition (4.30) soit satisfaite. De plus on suppose qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telle que $C_1 \leq h^{-1} \Delta t \leq C_2$, alors l'approximation (f_h, λ_h, μ_h) du système de Vlasov-Einstein présentée 4.3.3.2 où Π_h est le projecteur orthogonal d'une analyse multi-résolution en ondelettes de H^3 , converge vers la solution du théorème 13 sur l'intervalle de temps $[0, T]$ et pour $k \leq 1$, on a les estimations d'erreurs a priori*

$$\begin{aligned} \sup_{n \leq N_T} \|f_h^n - f(t^n)\|_{H^k(\Omega)} &\lesssim \Delta t^2 + \frac{h^{m-k}}{\Delta t} \\ \sup_{n \leq N_T} \{ \|\lambda_h^n - \lambda(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)}, \|\mu_h^n - \mu(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)}, \|m_h^n - m(t^n)\|_{L^\infty(\Omega_r)} \} &\lesssim \Delta t^2 + \frac{h^m}{\Delta t} \\ \sup_{n \leq N_T} \{ \|\rho_h^n - \rho(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)}, \|p_h^n - p(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)}, \|j_h^n - j(t^n)\|_{H^k(\Omega_r)} \} &\lesssim \Delta t^2 + \frac{h^{m-k}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Preuve. La preuve de ces deux théorèmes se trouve dans [41] ■

4.4 Méthodes de Runge-Kutta-Galerkin-discontinu conservant localement $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ pour l'équation d'induction de la MHD

4.4.1 Introduction

Les équations de la magnétohydrodynamique (MHD) modélisent la dynamique d'un fluide électriquement conducteur où les forces électromagnétiques sont du même ordre voire plus importantes que les forces hydrodynamiques. Le système de la MHD idéale combine les équations de la dynamique des gaz avec les équations de Maxwell pour lesquelles les effets relativistes, visqueux et résistifs sont négligés et peut s'écrire en trois dimensions sous la forme conservative suivante

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 && \text{(conservation de la masse)} \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + (p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2) \mathcal{I} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) &= 0 && \text{(conservation de l'impulsion)} \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{u}) &= 0 && \text{(équation d'induction)} \\ \partial_t (\rho e) + \nabla \cdot ((\rho e + p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2) \mathbf{u} - \mathbf{B}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})) &= 0 && \text{(conservation de l'énergie)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(contrainte)} \end{aligned}$$

où ρ est la densité, \mathbf{u} le champ de vitesse, \mathbf{B} le champ magnétique, p la pression, e l'énergie totale et \mathcal{I} la matrice identité. Si les conditions initiales sont à divergence nulle, i.e. $\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0$, alors les solutions exactes satisferont cette contrainte en tout temps. Pour des solutions régulières l'équation d'induction peut se réécrire comme $\partial_t \mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = 0$ car $\nabla \cdot (\nabla \times \cdot) = 0$. La préservation au niveau numérique de la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ est importante et constitue un problème très débattu pour les codes MHD [8, 48, 77, 82, 102, 186, 211]. Parce que des erreurs sur $\nabla \cdot \mathbf{B}$ surviennent dans les simulations numériques et peuvent croître avec le temps, des instabilités numériques peuvent apparaître et conduire à des comportements non physiques. Par exemple, une topologie du champ magnétique incorrecte conduit à un transport non physique dans le plan transverse des lignes du champ magnétique. Si on ne force pas la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, les conservations de l'impulsion et de l'énergie deviennent mauvaises et des forces fictives se développent le long des lignes du champ magnétique.

Dans cette section on présente l'analyse de convergence et des estimations d'erreurs a priori d'un schéma de Runge-Kutta-Galerkin-discontinu qui préserve localement la nullité de la divergence du champ magnétique pour des solutions régulières de l'équation d'induction en deux dimensions

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (4.51)$$

où $\mathbf{B} = (B_x(t, \mathbf{x}), B_y(t, \mathbf{x}))$ est le champ magnétique, et $\mathbf{u} = (u_x(t, \mathbf{x}), u_y(t, \mathbf{x}))$ est le champ de vitesse, avec la notation $\mathbf{x} = (x, y)$. On suppose ici que le champ de vitesse \mathbf{u} est donné.

La construction et l'analyse de convergence de cette méthode de Galerkin-discontinu repose sur trois ingrédients. On réécrit l'équation d'induction comme un système de Friedrichs. On écrit alors la méthode de Galerkin-discontinu sur la nouvelle formulation de ce système dans lequel on choisit des flux "upwind" pour définir les flux aux interfaces des éléments finis. Afin d'obtenir un schéma qui est localement à divergence nulle on utilise des fonctions solénoïdales par morceaux qui sont discontinues à travers les interfaces d'un élément fini mais qui sont à divergence nulle point par point sur chaque élément. Ces fonctions de base ont été développées [7, 151, 162] dans le contexte de méthodes d'éléments finis non-conformes pour les équations de Navier-Stokes. On utilise aussi des éléments finis de Nedelec dans $H(\text{rot})$ [181] en deux dimensions qui sont obtenus par rotations de $\pi/2$ des éléments finis de Raviart-Thomas [187]. On utilise le cadre développé dans [69] pour montrer la convergence et obtenir des estimations d'erreurs a priori. Dans [70] les auteurs ont aussi développé des schémas de Galerkin-discontinu qui préservent

localement la nullité de la divergence du champ magnétique pour résoudre les équations de Maxwell. Ils montrent aussi des estimations d'erreurs a priori de la forme $\mathcal{O}(h^{k+1/2})$ où k est le degré des polynômes locaux pour des schémas discrétisés seulement en espace.

4.4.2 Le schéma numérique

4.4.2.1 La formulation de Friedrichs

Grâce à la contrainte, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, l'équation d'induction (4.51) peut s'écrire comme un système de Friedrichs

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathcal{A}_x \mathbf{B})}{\partial x} + \frac{\partial(\mathcal{A}_y \mathbf{B})}{\partial y} + \mathcal{C} \mathbf{B} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0, T], \quad (4.52)$$

où

$$\mathcal{A}_x(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_x(t, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & u_x(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_y(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_y(t, \mathbf{x}) & 0 \\ 0 & u_y(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

et

$$\mathcal{C}(t, \mathbf{x}) = - \begin{pmatrix} \partial_x u_x(t, \mathbf{x}) & \partial_y u_x(t, \mathbf{x}) \\ \partial_x u_y(t, \mathbf{x}) & \partial_y u_y(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Parfois on utilisera la notations $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ au lieu de $(\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y)$ où \mathbf{v} est un champ de vecteurs ou de matrices. Avec des conditions aux limites appropriées sur $\partial\Omega$ Friedrichs [107] à montré l'existence et l'unicité dans $L^2(\Omega)$ de solutions faibles et classiques pour l'équation (4.52), sous la condition

$$\mathcal{C} + \mathcal{C}^T + \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial y} \geq \alpha \mathcal{I}, \quad \text{sur } \Omega, \quad (4.53)$$

avec α une constante strictement positive. On suppose que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}^\infty(\Omega))$, $\nabla \cdot \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $\mathcal{C} \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}^\infty(\Omega))$. On rappelle que si $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^2)$ avec $s \in \mathbb{R}$, alors le système (4.52) admet une solution faible unique $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[; \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^2)) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbf{H}^{s-1}(\mathbb{R}^2))$ (cf [3]). En particulier, si $s > 2$ la solution faible appartient à $\mathcal{C}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R}^2)$, i.e. une solution classique.

4.4.2.2 Les espaces d'approximation

On introduit d'abord l'espace $\ell^\infty(0, T; X)$ défini par

$$\ell^\infty(0, T; X) := \left\{ f : \{t^0, \dots, t^{N_T}\} \rightarrow X \mid \|f\|_{\ell^\infty(0, T; X)} = \max_{1 \leq n \leq N_T} \|f(t^n)\|_X < \infty \right\}$$

où X désigne un espace fonctionnel. Pour un sous-domaine $D \subset \Omega$, $H^m(D)$ désigne l'espace de Sobolev usuel qui est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $(u, v)_{m, D} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_D \partial^\alpha u \partial^\alpha v d\mathbf{x}$, $u, v \in H^m(D)$ et de la semi-norme au carré $|v|_{H^m(D)}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_D |\partial^\alpha v|^2$. On définit alors l'espace $\mathbf{H}^m(D) = (H^m(D))^2$ avec le produit scalaire $(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{m, D} = \sum_{i=1}^2 (v_i, w_i)_{m, D}$, et le champ de vecteurs solénoïdal $\mathbf{S}^m(D) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(D) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } D\}$, $m \geq 1$. Soit \mathcal{T}_h une famille de partition de Ω qui possède les propriétés décrites dans [7, 151]. Pour un entier $k \geq 0$, $\mathbb{P}^k(D)$ désigne l'espace des polynômes à deux variables de degrés inférieurs ou égaux à k sur D . On définit alors $\mathbb{P}^k(D) = (\mathbb{P}^k(D))^2$ et $V^k(D) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{P}^k(D) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ in } D\}$. On a $V^k(D) \subset \mathbf{S}^m(D)$ pour tout $m \geq 1$. Pour tout $k \geq 0$ on définit $V_h^k(\Omega) = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} V^k(K)$ où K est un élément fini et N le nombre d'éléments finis. La façon de construire des bases locales pour V^k est décrite dans [7, 151]. Par exemple, pour $k = 1$ les fonctions de base peuvent être construites en utilisant l'ensemble suivant

$$\Xi^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right\}.$$

Afin d'obtenir des fonctions de base pour $k = 2$, il suffit de compléter l'ensemble précédent par

$$\Xi^2 = \left\{ \begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix} \right\}.$$

On observe donc que les fonctions de base de l'espace V_h^k peuvent se construire en complétant judicieusement celles de V_h^{k-1} .

Remarque 3 Dans le cas où \mathcal{T}_h est une triangulation de \mathbb{R}^2 les espaces $V^k(K)$ sont équivalents aux espaces $RT_k^0(K)$ définis par $RT_k^0(K) = \{\mathbf{v} \in RT_k(K) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}$, où $RT_k(K)$ est l'espace des éléments finis de Raviart-Thomas sur K utilisé pour approcher $\mathbf{H}(\operatorname{div})$. En fait chaque espace $V^k(K)$ ou $RT_k^0(K)$ est construit comme le rotationnel d'une fonction de courant appartenant à $\mathbb{P}^{k+1}(K)$ et la dimension des deux espaces est égale à $\dim(\mathbb{P}^{k+1}(K)) - 1 = (k+1)(k+4)/2$.

Les espaces V_h^m possèdent des propriétés optimales d'approximation en relation avec les espaces $\mathbf{S}^m(\Omega)$, résumées et démontrées dans [7, 32].

On introduit maintenant un autre opérateur d'interpolation discontinue Π_h basé sur les éléments finis de Nédélec dans $\mathbf{H}(\operatorname{rot})$ [181]. Soit $\widetilde{\mathbb{P}}_k$ l'espace des polynômes homogènes de degrés k sur \mathbb{R}^2 , on considère alors le sous-espace de \mathbb{P}^k , $\mathcal{R}_k = \mathbb{P}^{k-1} \oplus S_k$ où S_k est défini par $S_k = \{\mathbf{p} \in \widetilde{\mathbb{P}}_k; \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = 0, \text{ pour tout } \mathbf{x} = (x_1, x_2)\}$. On définit alors $W^k(K) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{R}_k(K)\}$ et $W_h^k(\Omega) = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} W^k(K)$. En suivant [119], si on définit deux ensembles de moments $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s$ sur K avec $s \geq 1/2$: $\mathcal{M}_e(\mathbf{v}) = \{\int_e (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu}_e) \cdot \mathbf{q} \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}^{k-1}(e) \text{ pour tout bord } e \text{ de } K\}$ où $\boldsymbol{\nu}_e$ est la normale unitaire extérieure du bord e de K , et $\mathcal{M}_K(\mathbf{v}) = \{\int_K \mathbf{v} \cdot \mathbf{q} \, dx, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{P}^{k-2}(K)\}$, alors le champ de vecteurs \mathbf{v} de \mathcal{R}_k est entièrement déterminé sur K par ces deux ensembles de moments $\mathcal{M}_e(\mathbf{v})$ et $\mathcal{M}_K(\mathbf{v})$. De plus la composante tangentielle de \mathbf{v} sur la frontière e de K dépend seulement des degrés de liberté $\mathcal{M}_e(\mathbf{v})$ définis sur chaque bord. Les propriétés d'approximation de ces espaces sont décrites dans [119, 181]. Si $m = 1$ alors $\mathcal{R}_1 = \mathbb{P}^0 \oplus S_1$ où $S_1 = \operatorname{span}(x^\perp)$ et il est alors évident que $\operatorname{div} \mathcal{R}_1 \equiv 0$. Les champs de vecteurs de \mathcal{R}_1 sont alors à divergence nulle. Malheureusement les espace \mathcal{R}_k avec $k > 1$ ne sont pas des espaces à divergence nulle.

4.4.2.3 La méthode de Galerkin-discontinu

Dans ce paragraphe on décrit la méthode de Galerkin-discontinu que l'on utilise pour discrétiser en espace l'équation d'induction écrite sous la forme d'un système de Friedrichs. Si on prend le produit scalaire de l'équation (4.51) avec une fonction test $\boldsymbol{\varphi}$, en utilisant une formule de Green, une intégration sur l'élément K donne

$$\partial_t \left(\int_K \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \right) - \sum_{i=1}^2 \int_K \mathcal{A}_i \mathbf{B} \cdot \partial_i \boldsymbol{\varphi} \, dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in \partial K} \int_e \mathcal{A}_i \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} \nu_{e,K}^i \, d\Gamma + \int_K \mathcal{C} \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = 0, \quad (4.54)$$

où $\boldsymbol{\nu}_{e,K} = (\nu_{e,K}^1, \nu_{e,K}^2)^T = (\nu_{e,K}^x, \nu_{e,K}^y)^T$ désigne la normale unitaire extérieure du bord e de K . On remplace respectivement \mathbf{B} et $\boldsymbol{\varphi}$ par \mathbf{B}_h et $\boldsymbol{\varphi}_h$ dans (4.54) où $\mathbf{B}_h, \boldsymbol{\varphi}_h \in V_h^k(\Omega)$. Cependant les termes issues de la frontière de l'élément K dans (4.54) n'ont pas de sens puisque \mathbf{B}_h et $\boldsymbol{\varphi}_h$ sont discontinus sur la frontière ∂K de l'élément K . On remplace alors ces termes par des flux numériques "upwind" que l'on définit comme il suit. On définit $\mathcal{A}_{e,K}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^2 (\mathcal{A}_i)_e \nu_{e,K}^i$, $\mathcal{C}_{e,K}(t, \mathbf{x}) = -(\mathcal{A}_{e,K}(t, \mathbf{x}))^-$ et $\mathcal{D}_{e,K}(t, \mathbf{x}) = (\mathcal{A}_{e,K}(t, \mathbf{x}))^+$ où A^- et A^+ désignent respectivement la partie négative et positive de A . On définit alors le flux numérique "upwind" $g(\nu_{e,K}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\mathcal{C}_{e,K} \mathbf{w} + \mathcal{D}_{e,K} \mathbf{v}$. En remarquant que $|A| = A^+ - A^-$ et $A = A^+ + A^-$ on peut réécrire $g(\nu_{e,K}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ comme un flux de Lax-Friedrichs $g(\nu_{e,K}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathcal{A}_{e,K} \frac{(\mathbf{v} + \mathbf{w})}{2} - |\mathcal{A}_{e,K}| \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v})}{2}$, où \mathbf{v} (resp. \mathbf{w}) désigne la trace intérieure (resp. extérieure) de la solution sur le bord de l'élément K . On obtient maintenant le schéma semi-discrétisé en espace

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int_K \mathbf{B}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx \right) - \sum_{i=1}^2 \int_K \mathcal{A}_i \mathbf{B}_h \cdot \partial_i \boldsymbol{\varphi}_h \, dx \\ + \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in \partial K} \int_e g(\nu_{e,K}, \mathbf{B}_K, \mathbf{B}_{K_e}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_K \, d\Gamma + \int_K \mathcal{C} \mathbf{B}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h \, dx = 0. \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi_h \in V_h^k$ où K_e est l'élément adjacent à K qui partage la même frontière e . Soit T le temps final et $\Delta t = T/N_T$ le pas de temps. En utilisant un schéma de Runge-Kutta du second ordre on obtient le schéma discrétisé complet

$$\begin{aligned} \int_K \mathbf{Y}_h^n \cdot \varphi_h dx &= \int_K \mathbf{B}_h^n \cdot \varphi_h dx + \Delta t \mathcal{F}_K^n(\mathbf{B}_h^n, \varphi_h) \\ \int_K \mathbf{B}_h^{n+1} \cdot \varphi_h dx &= \int_K \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}_h^n + \frac{1}{2} \mathbf{Y}_h^n \right) \cdot \varphi_h dx + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}_K^{n+1}(\mathbf{Y}_h^n, \varphi_h) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{F}_K^n(\mathbf{W}, \varphi_h) = \sum_{i=1}^2 \int_K \mathcal{A}_i^n \mathbf{W}^n \cdot \partial_i \varphi_h dx + \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in \partial K} \int_e g^n(\mathbf{W})_e \cdot \varphi_K d\Gamma - \int_K \mathcal{C}^n \mathbf{W}^n \cdot \varphi_h dx$$

avec

$$g^n(\mathbf{W})_e = g^n(\nu_{e,K}, \mathbf{W}_K^n, \mathbf{W}_{K_e}^n) = \mathcal{A}_{e,K} \frac{(\mathbf{W}_K^n + \mathbf{W}_{K_e}^n)}{2} - |\mathcal{A}_{e,K}| \frac{(\mathbf{W}_{K_e}^n - \mathbf{W}_K^n)}{2},$$

$\mathcal{A}_{e,K}^n = \mathcal{A}_{e,K}(t^n, \mathbf{x})$ et $\mathcal{C}^n = \mathcal{C}(t^n, \mathbf{x})$. Par \mathcal{X}^k on désigne V^k ou W^k . Si on décompose \mathbf{B}_h et φ_h dans la base de \mathcal{X}^k , i.e.

$$\mathbf{B}_h^n(\mathbf{x}) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{B}_K^n(\mathbf{x}) \mathbb{1}_K(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}_K^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{X}^k)} \sigma_K^{i,n} \Psi_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Y}_K^n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathcal{X}^k)} \theta_K^{i,n} \Psi_i(\mathbf{x})$$

avec $\Psi_i \in \mathcal{X}^k$, on obtient le schéma

$$\begin{cases} [\Theta_K]^n &= [\Sigma_K]^n + \Delta t \mathcal{L}_K^n([\Sigma_h]^n) \\ [\Sigma_K]^{n+1} &= \frac{1}{2}([\Sigma_K]^n + [\Theta_K]^n) + \Delta t \mathcal{L}_K^{n+1}([\Theta_h]^n) \end{cases}$$

où $[\Sigma_K]^n = (\sigma_K^{1,n}, \dots, \sigma_K^{\dim(\mathcal{X}^k),n})^T$, $[\Sigma_h]^n = (\sigma^{1,n}, \dots, \sigma^{\text{card}(\mathcal{T}_h)\dim(\mathcal{X}^k),n})^T$ et pour tout $i \in \{1, \dots, \dim(\mathcal{X}^k)\}$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_K^n([\Sigma_h]^n)]_i &= \sum_{l=1}^2 \sum_{m,j=1}^{\dim(\mathcal{X}^k)} \sigma_K^{j,n} \int_K \mathcal{A}_l^n(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \cdot (\mathcal{M}_K^{-T})_{m,i} \partial_l \Psi_m(\mathbf{x}) dx \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{e \in \partial K} \int_e \sum_{m,j=1}^{\dim(\mathcal{X}^k)} [\sigma_K^{j,n} D_{e,K}^n(\mathbf{x}(\Gamma)) - \sigma_{K_e}^{j,n} C_{e,K}^n(\mathbf{x}(\Gamma))] \Psi_j(\mathbf{x}(\Gamma)) \cdot (\mathcal{M}_K^{-T})_{m,i} \Psi_m(\mathbf{x}(\Gamma)) d\Gamma \\ &- \sum_{m,j=1}^{\dim(\mathcal{X}^k)} \sigma_K^{j,n} \int_K \mathcal{C}^n(\mathbf{x}) \Psi_j(\mathbf{x}) \cdot (\mathcal{M}_K^{-T})_{m,i} \Psi_m(\mathbf{x}) dx \end{aligned}$$

avec $(\mathcal{M}_K)_{ij} = \int_K \Psi_i(\mathbf{x}) \cdot \Psi_j(\mathbf{x}) dx$.

4.4.3 Théorème de convergence et estimations d'erreurs a priori

Dans ce paragraphe on présente le théorème de convergence et les estimations d'erreurs a priori en norme L^2 du schéma RKDG de la section précédente.

Théorème 16 Soient \mathbf{u} et \mathbf{B}_0 suffisamment réguliers, typiquement on considère $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}([0, +\infty[\times (\mathbb{R}^2))$ et $\mathbf{B}_0 \in \mathbf{H}^{m+1}(\mathbb{R}^2)$. On suppose qu'il existe une constante $\beta(\alpha)$ qui dépend de α telle que la condition CFL $\Delta t \leq \beta(\alpha) h^{4/3}$ soit satisfaite. De plus on suppose

que la condition (4.53) est satisfaite et que l'on a $\|\delta_{\mathbf{B}}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|\mathbf{B}^0 - \pi_h \mathbf{B}^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{m+1})$. Alors il existe une constante $C = C(\|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}([0,T] \times \Omega)}, T, \alpha)$ indépendante de h telle que

$$\|\mathbf{B}_h\|_{l^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq C \|\mathbf{B}_h(0)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

où $\mathbf{B}_h(0) \in V_h^m$ ou $\mathbf{B}_h(0) \in W_h^m$ avec $m = 1$. De plus il existe une constante $C = C(T, \alpha, \|\mathbf{u}\|_{W^{1,\infty}([0,T] \times \Omega)}, \|\mathbf{B}\|_{W^{3,\infty}(0,T;\mathbf{H}^{m+1}(\mathbb{R}^2))})$ indépendante h telle que

$$\|\mathbf{B} - \mathbf{B}_h\|_{l^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \sqrt{\Delta t \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e |\mathcal{A}_e^n |[\mathbf{B}_h^n - \mathbf{B}(t^n)]_e \cdot [\mathbf{B}_h^n - \mathbf{B}(t^n)]_e d\Gamma} \leq C (\Delta t^2 + h^{m+\eta})$$

où $\eta = \frac{1}{2}$ si $\mathbf{B}_h \in V_h^m$ et $\eta = -\frac{1}{2}$ si $\mathbf{B}_h \in W_h^m$ avec $m = 1$.

Preuve. La preuve de ce théorème est basée sur des estimations d'énergie et sur les propriétés d'approximation des espaces V_h^m et W_h^m . Pour plus de détails on pourra consulter [32].

■

Chapitre 5

Approximation numérique de quelques équations de Vlasov

Sommaire

5.1	Introduction	94
5.2	Les modèles de Vlasov-Darwin et Vlasov-Poiswell	94
5.2.1	Le modèle de Darwin	94
5.2.2	Le modèle de “Poiswell”	95
5.2.3	Approximation numérique	96
5.2.4	L’instabilité faisceau-plasma électromagnétique	99
5.3	Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste	99
5.3.1	Introduction	99
5.3.2	Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste	101
5.3.3	L’analyse multi-résolution de L^2 en ondelettes	102
5.3.4	Approximation numérique adaptative	104
5.3.5	Simulations de l’interaction laser-plasma	106
5.3.6	Analyse de performance	110
5.4	Le modèle de Vlasov-gyrocinétique	111
5.4.1	Introduction	111
5.4.2	Approximation numérique	112
5.4.3	Instabilité ITG	113

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente la résolution numérique de plusieurs modèles de Vlasov non linéaires : Vlasov-Darwin, Vlasov-Poiswell, Vlasov-Maxwell relativiste et Vlasov-gyrocinétique. Les modèles de Vlasov-Darwin et Vlasov-Poiswell sont des approximations de Vlasov-Maxwell où l'on néglige les phénomènes électromagnétiques à hautes fréquences. Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste est un des modèles de base pour l'étude cinétique de l'interaction laser-plasma à haut flux qui intervient en fusion par confinement inertiel (FCI, projet laser-mégajoules). Le modèle Vlasov-gyrocinétique est un modèle destiné à l'étude de la turbulence électrostatique dans les plasmas magnétisés (voir chapitre 4. L'étude de la turbulence dans un plasma magnétisé est primordiale car elle détermine de temps de confinement de l'énergie dans un plasma de fusion (FCM, projet ITER).

5.2 Les modèles de Vlasov-Darwin et Vlasov-Poiswell

Soit L la longueur caractéristique du problème et τ son temps caractéristique. Alors on définit le petit paramètre sans dimension $\varepsilon = L/\tau c$ où c est la vitesse de la lumière. L'équation de Vlasov relativiste adimensionnée s'écrit alors

$$\partial_t f + \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\xi}} f = 0 \quad (5.1)$$

où $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ représente la fonction de distribution d'une espèce de particules (ions, électrons) dépendant du temps t , de la position \mathbf{x} , et de l'impulsion $\boldsymbol{\xi}$. Le champ de force $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ est donné par la force de Lorentz

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = q(\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \times \mathbf{B}) \quad (5.2)$$

où $q = \pm 1$ est le signe de la charge. La vitesse relativiste des particules $\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi})$ est donnée par

$$\mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\gamma(\boldsymbol{\xi})} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 |\boldsymbol{\xi}|^2}}. \quad (5.3)$$

A partir de la fonction de distribution f , on peut calculer les densités de charge et de courant

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (5.4)$$

Le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) satisfait certaines équations où les densités de charge et de courant apparaissent comme des termes sources. De plus les équations du champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) doivent satisfaire l'équation de conservation de la charge

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

qui est obtenue en intégrant l'équation de Vlasov (5.1) par rapport à $\boldsymbol{\xi}$. Cette condition de compatibilité est nécessaire pour résoudre le système couplé.

On présente maintenant deux modèles pour le champ électromagnétique qui ont pour caractéristique commune de ne tenir compte que de la partie basse fréquence du champ électromagnétique.

5.2.1 Le modèle de Darwin

L'approximation de Darwin des équations de Maxwell consiste à supprimer les ondes à hautes fréquences (onde de type lumière) pour ne conserver que celles qui sont à basses fréquences. Le champ électrique \mathbf{E} est décomposé en deux parties, sa partie irrotationnelle \mathbf{E}_{irr} qui est à rotationnel nul et sa partie solénoïdale \mathbf{E}_{sol} qui est à divergence nulle, i.e. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{irr} + \mathbf{E}_{sol}$, où $\nabla \times \mathbf{E}_{irr} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{E}_{sol} = 0$. Puisque $\nabla \times \mathbf{E}_{irr} = 0$ alors on a $\mathbf{E}_{irr} = -\nabla \phi$. L'approximation

de Darwin consiste à éliminer la partie solénoïdale du courant de déplacement dans l'équation d'Ampère

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}_{irr} + \partial_t \mathbf{E}_{sol}. \quad (5.5)$$

En prenant le rotationnel cette équation, obtient

$$-\Delta \mathbf{B} = \varepsilon \nabla \times \mathbf{j}. \quad (5.6)$$

On peut vérifier que l'équation de conservation de la charge est bien satisfaite pour le modèle de Darwin.

En prenant le rotationnel de l'équation de Faraday et en utilisant la dérivée temporelle de l'équation d'Ampère on obtient une équation elliptique pour \mathbf{E}_{sol} qui s'écrit

$$-\Delta \mathbf{E}_{sol} = -\varepsilon^2 (\partial_t \mathbf{j} + \partial_t^2 \mathbf{E}_{irr}) = -\varepsilon^2 (\partial_t \mathbf{j} - \partial_t \mathbf{j}_{irr}) = -\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{j}_{sol} \quad (5.7)$$

où on pose

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{irr} + \mathbf{j}_{sol} \quad \text{et} \quad \partial_t \mathbf{E}_{irr} + \mathbf{j}_{irr} = 0. \quad (5.8)$$

Finalement l'équation de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E}_{irr} = \rho$, donne l'équation de Laplace pour le potentiel électrostatique

$$-\Delta \phi = \rho. \quad (5.9)$$

Au lieu de résoudre des équations de Maxwell qui sont hyperboliques on doit résoudre maintenant trois équations elliptiques. Par conséquent la condition CFL n'est plus nécessaire et donc on n'a plus de contrainte sur le pas de temps.

En utilisant un développement de Hilbert par rapport à ε pour \mathbf{E} et \mathbf{B} , i.e.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \varepsilon \mathbf{E}_1 + \dots, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1 + \dots \quad (5.10)$$

il a été démontré [83, 188] que le modèle de Darwin coïncide avec les équations de Maxwell jusqu'à l'ordre deux en ε . Par conséquent l'approximation de Darwin est justifiée dans le régime non relativiste ($\varepsilon \ll 1$)

5.2.2 Le modèle de "Poisswell"

Le modèle de Poisswell a été introduit en mécanique quantique [167] pour ajouter de manière auto-cohérente un champ électromagnétique d'ordre ε à l'équation de la fonction d'onde de Pauli qui est aussi une approximation d'ordre ε de l'équation de Dirac. Le nom "Poisswell" est une contraction de Poisson et Maxwell qui est utilisée pour signifier que l'on ne considère qu'une approximation des équations de Maxwell. Partons des équations de Maxwell admimensionnées

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon(\mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}), \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \varepsilon \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.11)$$

En introduisant les potentiels ϕ et \mathbf{A} , le champ électromagnétique est défini par

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \varepsilon \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.12)$$

Afin que le champ électromagnétique soit bien défini par les potentiels il faut ajouter une jauge. Ici on choisit la jauge de Lorentz adimensionnée qui s'écrit

$$\varepsilon \partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.13)$$

En injectant (5.10) et les développements de Hilbert de ϕ et \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \varepsilon \mathbf{A}_1 + \dots, \quad \phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \dots \quad (5.14)$$

dans (5.11) et (5.12)-(5.13) et en rassemblant tous les termes du même ordre en ε , on obtient :

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \rho, \quad (5.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{alors} \quad \mathbf{B}_0 = 0, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{E}_0 = -\nabla \phi_0, \quad (5.17)$$

$\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \partial_t \mathbf{E}_0 + \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (5.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0 \quad \text{alors} \quad \mathbf{E}_1 = 0, \quad (5.19)$$

$$\partial_t \phi_0 + \nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0, \quad (5.20)$$

On a $\mathbf{A} = \varepsilon \mathbf{A}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ puisque $\mathbf{A}_0 = 0$ et $\phi = \phi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ puisque $\phi_1 = 0$ d'après (5.16) et (5.19). A partir des équations (5.15), (5.17), (5.18), et (5.20) on obtient le système de Poisswell comme une approximation d'ordre ε des équations de Maxwell (5.11)

$$-\Delta \phi = \rho, \quad -\Delta \mathbf{A} = \varepsilon \mathbf{j} \quad (5.21)$$

Si on dérive la première équation de (5.21) par rapport au temps, qu'on multiplie le résultat par ε et si on ajoute la divergence de la seconde équation de (5.21) on obtient

$$-\varepsilon(\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j}) = \Delta(\varepsilon \partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A}) = 0.$$

Par conséquent le système de Poisswell vérifie l'équation de conservation de la charge. Il est donc compatible avec l'équation de Vlasov. Si on prend le rotationnel de la deuxième équation de (5.21) on obtient pour le champ magnétique, l'équation

$$-\Delta \mathbf{B} = \varepsilon \nabla \times \mathbf{j} \quad (5.22)$$

qui est la même que celle du modèle de Darwin (5.6). Si on dérive en temps la deuxième équation de (5.21) on obtient une équation pour $-\varepsilon \partial_t \mathbf{A}$, la seconde partie du champ électrique (5.12) du modèle de Poisswell

$$-\Delta(-\varepsilon \partial_t \mathbf{A}) = -\varepsilon^2 \partial_t \mathbf{j} \quad (5.23)$$

Notons la différence avec l'équation (5.7) pour la partie solénoïdale du champ électrique dans le modèle de Darwin. En fait ces deux champs électriques sont différents. L'un (\mathbf{E}_{sol}) est à divergence nulle, l'autre ($-\varepsilon \partial_t \mathbf{A}$) non. Notons que la jauge sur les potentiels dans le modèle de Darwin est la jauge de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), alors que pour le modèle de Poisswell on a choisit la jauge de Lorentz.

5.2.3 Approximation numérique

Dans ce paragraphe on introduit la méthode semi-Lagrangienne avec un "splitting" à la Strang. On se concentrera sur les problèmes posés par les modèles de Darwin et Poisswell.

5.2.3.1 La méthode semi-Lagrangienne avec splitting

L'intégration de l'équation de Vlasov en utilisant une méthode semi-Lagrangienne avec un "splitting" à la Strang a souvent été utilisée [62, 10, 29, 30, 34]. Cette méthode consiste à décomposer l'opérateur de transport global en deux opérateurs de transport - le premier dans l'espace physique, le second dans l'espace des vitesses - et à résoudre ceux-ci successivement dans un ordre judicieux afin d'obtenir une approximation d'ordre élevé en temps de l'opérateur de transport global. Soit \mathcal{M}_h une discrétisation de l'espace des phases et f_h^n une approximation de f au temps t^n sur \mathcal{M}_h . L'algorithme général pour construire f_h^{n+1} consiste en trois étapes.

- 1) Une demi-advection dans l'espace physique. Cet étape consiste à résoudre

$$\partial_t f + \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} f = 0, \quad t \in [t^n, t^{n+1/2}], \quad f(t^n) = f_h^n. \quad (5.24)$$

Pour résoudre l'équation (5.24) on intègre les courbes caractéristiques associées

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\Xi}(t))$$

sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1/2}]$. On obtient alors

$$\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n+1/2} = \int_{t^{n+1/2}}^{t^n} \mathbf{v}(\Xi(t)) dt = \int_{t^{n+1/2}}^{t^n} \mathbf{v}(\Xi(t^n)) dt + \mathcal{O}(\Delta t^2) \simeq -\mathbf{v}(\Xi^n) \Delta t / 2$$

où $(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^n) \in \mathcal{M}_h$ et \mathbf{X}^n est l'origine de la courbe caractéristique que l'on cherche. La nouvelle fonction de distribution est telle que

$$f_h^*(\mathbf{x}, \xi) := \tilde{f}_h^{n+1/2}(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^n) = f_h^n(\mathbf{X}^n, \Xi^n) \quad \forall (\mathbf{x}, \xi) \in \mathcal{M}_h.$$

2) Une advection complète dans l'espace des vitesses. Cette étape consiste à résoudre

$$\partial_t f + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \xi) \cdot \partial_\xi f = 0, \quad t \in [t^n, t^{n+1}], \quad f(t^n) = f_h^*. \quad (5.25)$$

Pour résoudre l'équation (5.25) on intègre les courbes caractéristiques associées

$$\frac{d\Xi}{dt}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \Xi(t))$$

sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \Xi^{n+1} - \Xi^n &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t), \Xi(t)) dt \\ &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(t^{n+1/2}, \mathbf{X}(t^{n+1/2}), \Xi(t^{n+1/2})) dt + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\simeq \mathbf{F}(t^{n+1/2}, \mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^{n+1/2}) \Delta t \end{aligned}$$

où $(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^{n+1}) \in \mathcal{M}_h$ et Ξ^n est l'origine de la courbe caractéristique que l'on cherche. Puisque $\Xi^{n+1/2}$ n'est pas connu on le remplace par son approximation au second ordre en temps $\Xi^{n+1/2} = \{\Xi^n + \Xi^{n+1}\}/2 + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ et l'équation précédente devient

$$\Xi^{n+1} - \Xi^n = \mathbf{F}(t^{n+1/2}, \mathbf{X}^{n+1/2}, \{\Xi^n + \Xi^{n+1}\}/2) \Delta t. \quad (5.26)$$

Dans le cas non relativiste l'équation (5.26) peut être résolue explicitement. La solution se décompose alors en une translation due au champ électrique et une rotation due au champ magnétique. Dans le cas relativiste on doit résoudre un problème de point fixe à cause de la présence du terme non linéaire $\gamma(\xi)$. Cependant ce problème de point fixe peut être évité si on intègre les caractéristiques en décomposant (avec un splitting de Strang par exemple) les effets dus au champ électrique (translation) et ceux dus au champ magnétique (rotation) parce que durant la rotation il est facile de voir que le terme $\gamma(\xi)$ reste constant. La nouvelle fonction de distribution est telle que

$$f_h^{**}(\mathbf{x}, \xi) := \hat{f}_h^{n+1/2}(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^{n+1}) = f_h^*(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^n) \quad \forall (\mathbf{x}, \xi) \in \mathcal{M}_h.$$

3) Une demi-advection dans l'espace physique. Cette étape consiste à résoudre

$$\partial_t f + \mathbf{v}(\xi) \cdot \partial_{\mathbf{x}} f = 0, \quad t \in [t^{n+1/2}, t^{n+1}], \quad f(t^{n+1/2}) = f_h^{**}. \quad (5.27)$$

Pour résoudre l'équation (5.27) on intègre les courbes caractéristiques associées

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{v}(\Xi(t))$$

sur l'intervalle de temps $[t^{n+1/2}, t^{n+1}]$. On obtient alors

$$\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{X}^{n+1/2} = \int_{t^{n+1/2}}^{t^{n+1}} \mathbf{v}(\Xi(t)) dt = \int_{t^{n+1/2}}^{t^{n+1}} \mathbf{v}(\Xi(t^{n+1})) dt + \mathcal{O}(\Delta t^2) \simeq \mathbf{v}(\Xi^{n+1}) \Delta t / 2$$

où $(\mathbf{X}^{n+1}, \Xi^{n+1}) \in \mathcal{M}_h$ et $\mathbf{X}^{n+1/2}$ est l'origine des courbes caractéristiques que l'on cherche. La nouvelle fonction de distribution est telle que

$$f_h^{n+1}(\mathbf{x}, \xi) = f_h^{n+1}(\mathbf{X}^{n+1}, \Xi^{n+1}) = f_h^{**}(\mathbf{X}^{n+1/2}, \Xi^{n+1}) \quad \forall (\mathbf{x}, \xi) \in \mathcal{M}_h.$$

Afin de reconstruire la fonction de distribution sur le maillage de l'espace des phases et de l'interpoler sur l'ensemble des origines des courbes caractéristiques, on utilise une base de B-splines. Dans cet algorithme, qui est du second ordre en temps (cf Chap. 4, [30, 34]), on remarque qu'il reste à calculer une approximation de $\mathbf{F}(t^{n+1/2}, \cdot, \cdot)$. C'est l'objectif du paragraphe suivant.

5.2.3.2 Les particularités du modèle Vlasov-{Darwin,Poiswell}

Afin d'obtenir une approximation du champ de force $\mathbf{F}^{n+1/2} = \mathbf{F}(t^{n+1/2}, \cdot, \cdot)$, on doit approcher $\mathbf{B}^{n+1/2}$, $-\nabla\phi^{n+1/2}$, $\mathbf{E}_{sol}^{n+1/2}$ et $-\varepsilon\partial_t\mathbf{A}^{n+1/2}$.

Approximation de $\mathbf{B}^{n+1/2}$ et $-\nabla\phi^{n+1/2}$:

Si on connaît $\rho^{n+1/2}$ (resp. $\mathbf{j}^{n+1/2}$) on peut obtenir $\phi^{n+1/2}$ (resp. $\mathbf{B}^{n+1/2}$) en résolvant (5.9) (resp. (5.6)) par des méthodes classiques (méthodes spectrales, méthodes de différences finies ou d'éléments finis, ...). La première façon de calculer $\rho^{n+1/2}$ (resp. $\mathbf{j}^{n+1/2}$) est de calculer le moment d'ordre zéro (resp. d'ordre un) par rapport à la variable d'impulsion $\boldsymbol{\xi}$ de la fonction de distribution $\tilde{f}^{n+1/2} = f^n(x - \mathbf{v}\Delta t/2, \boldsymbol{\xi})$. La seconde façon est de prendre le moment d'ordre zéro (resp. d'ordre un) par rapport à la variable d'impulsion $\boldsymbol{\xi}$ de l'équation de Vlasov (5.1), puis d'intégrer le résultat sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1/2}]$. Ces deux méthodes sont équivalentes à l'ordre deux en temps.

Approximation de $\mathbf{E}_{sol}^{n+1/2}$ et $-\varepsilon\partial_t\mathbf{A}^{n+1/2}$:

On traite seulement le cas du champ \mathbf{E}_{sol} , car d'après l'équation (5.23), on observe que le cas du champ $-\varepsilon\partial_t\mathbf{A}$ est le même problème à condition de supprimer le terme $-\varepsilon^2\partial_t^2\mathbf{E}_{irr}$ dans l'équation (5.7). Calculons d'abord $\partial_t\mathbf{j}$. En multipliant (5.1) par $q\mathbf{v}$ et en intégrant en $\boldsymbol{\xi}$, on obtient

$$\partial_t\mathbf{j} = -q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) d\boldsymbol{\xi} + q(\rho_{\gamma}\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{j}_{\gamma} \times \mathbf{B}) - K_{\varepsilon,1}\mathbf{E} \quad (5.28)$$

où

$$\rho_{\gamma^k} = q \int_{\mathbb{R}^3} f \frac{d\boldsymbol{\xi}}{\gamma^k}, \quad \mathbf{j}_{\gamma^k} = q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v} f \frac{d\boldsymbol{\xi}}{\gamma^k}, \quad K_{\varepsilon,k} = \varepsilon^2 q^2 \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) f \frac{d\boldsymbol{\xi}}{\gamma^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.29)$$

A partir des équations (5.7) et (5.28) on obtient

$$-\Delta\mathbf{E}_{sol} = \varepsilon^2 \left(q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) d\boldsymbol{\xi} - q(\rho_{\gamma}\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{j}_{\gamma} \times \mathbf{B}) + K_{\varepsilon,1}\mathbf{E} - \partial_t^2\mathbf{E}_{irr} \right) \quad (5.30)$$

Si on sépare les parties solénoïdales et irrotationnelles du champ électrique dans le second membre de (5.30) on obtient

$$-\Delta\mathbf{E}_{sol} + \widetilde{K}_{\varepsilon}\mathbf{E}_{sol} = \mathbf{S} \quad (5.31)$$

où

$$\widetilde{K}_{\varepsilon} = \varepsilon^2 (q\rho_{\gamma}I - K_{\varepsilon,1})$$

et

$$\mathbf{S} = \varepsilon^2 q \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f) d\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^2 q(\rho_{\gamma}\mathbf{E}_{irr} + \varepsilon\mathbf{j}_{\gamma} \times \mathbf{B}) + \varepsilon^2 K_{\varepsilon,1}\mathbf{E}_{irr} - \varepsilon^2 \partial_t^2\mathbf{E}_{irr}. \quad (5.32)$$

Pour obtenir le champ $\mathbf{E}_{sol}^{n+1/2}$ on résout l'équation (5.31) au temps $t^{n+1/2}$. Les termes $\widetilde{K}_{\varepsilon}^{n+1/2}$ et $\mathbf{S}^{n+1/2}$ s'obtiennent en prenant les moments en $\boldsymbol{\xi}$ de l'équation de Vlasov (5.1) et utilisant des formules de différences finies.

5.2.4 L'instabilité faisceau-plasma électromagnétique

Dans ce paragraphe on s'intéresse au cas test de l'instabilité faisceau-plasma électromagnétique pour valider la méthode numérique. Ici on choisit un champ magnétique $\mathbf{B} = B_z$ parallèle à la direction z , tandis que le champ électrique $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ est perpendiculaire à B_z . Le champ électromagnétique (E_x, E_y, B_z) dépend des variable x et y , alors que la fonction de distribution est telle que $f = f(t, x, y, v_x, v_y)$. La condition initiale est

$$f(0, x, v) = \frac{1}{2\pi} (1 + \alpha \cos(k_x x) \cos(k_y y)) \left(\frac{n_{0,1}}{v_{th,1}^2} e^{-\frac{(v_x - v_{0,1})^2 + v_y^2}{2v_{th,1}^2}} + \frac{n_{0,2}}{v_{th,2}^2} e^{-\frac{(v_x - v_{0,2})^2 + v_y^2}{2v_{th,2}^2}} \right), \quad \forall (x, y) \in [0, L]^2, \quad \forall (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$$

où $v_{0,1}$ et $v_{0,2}$ sont respectivement les vitesses moyennes du faisceau et du plasma ; $v_{th,1}$ et $v_{th,2}$ sont les vitesses thermiques ; $n_{0,1}$ et $n_{0,2}$ sont respectivement les densités initiales du faisceau et du plasma. Les conditions aux limites en espace sont périodiques. Les paramètres $n_{0,1}$, $n_{0,2}$, $v_{0,1}$ et $v_{0,2}$ sont choisis de telle sorte que la densité totale soit l'unité et que le courant total soit nul, i.e.

$$n_{0,1} + n_{0,2} = 1 \quad \text{et} \quad n_{0,1}v_{0,1} + n_{0,2}v_{0,2} = 0.$$

On suppose que les conditions initiales ont des densités homogènes, i.e. $n_{0,1}$ et $n_{0,2}$ ne dépendent pas des variables de l'espace physique. La condition initiale modélise deux courants de particules qui s'interpénètrent, l'un est porté par des électrons rapides, l'autre est porté par un plasma. Afin d'obtenir un taux d'instabilité théorique, on part des équations fluides pour la dynamique des particules, i.e.

$$\partial_t \rho_a + \nabla \cdot \mathbf{j}_a = 0, \quad \partial_t \boldsymbol{\xi}_a + (\boldsymbol{\xi}_a \cdot \nabla) \boldsymbol{\xi}_a = q(\mathbf{E} + \varepsilon \mathbf{v}_a \times \mathbf{B})$$

où $\mathbf{j}_a = qn_a \mathbf{v}_a = \rho_a \mathbf{v}_a$, avec $a = \{1, 2\}$. Les équations fluides sont couplées au champ électromagnétique en utilisant les modèles de Darwin et Poisswell. Après linéarisation du modèle constitué par les équations fluides non relativistes et les équations du champ électromagnétique, en utilisant $q = -1$, $\mathbf{j} = \sum_a \mathbf{j}_a$ et $\rho = \sum_a \rho_a$ le taux d'instabilité est la partie imaginaire des racines (par rapport à la variable ω) du polynôme caractéristique défini par le déterminant des matrices de dispersion $\mathbb{D}_d(B_0, \rho_{0,a}, \mathbf{v}_{0,a}, \omega, \mathbf{k})$ (Darwin) et $\mathbb{D}_p(\rho_{0,a}, \mathbf{v}_{0,a}, \omega, \mathbf{k})$ [33]. Les paramètres de la simulation sont $L = 4\pi$ ($k_x = 0.5$, $k_y = 0.5$), $\varepsilon = 0.01$ et $\Delta t = 1/4$. Pour le cas symétrique on prend les paramètres physique $n_{0,1} = n_{0,2} = 0.5$, $v_{0,1} = -v_{0,2} = 1$, $v_{th,1} = v_{th,2} = 0.1$, $\alpha = 10^{-10}$, et $v_{max} = 3$. Pour obtenir le taux d'instabilité analytique on cherche les racines de l'équation (en la variable ω) $\det(\mathbb{D}_d(B_0, \rho_{0,a}, \mathbf{v}_{0,a}, \omega, \mathbf{k})) = 0$ (resp. $\det(\mathbb{D}_p(\rho_{0,a}, \mathbf{v}_{0,a}, \omega, \mathbf{k})) = 0$) pour le couplage avec le modèle Darwin (resp. Poisswell). La partie imaginaire non nulle des racines est pour les deux systèmes $\gamma = 0.340$. Pour cas non symétrique on prend les paramètres $n_{0,1} = 10/11$, $n_{0,2} = 1/11$, $v_{0,1} = -0.1$, $v_{0,2} = 1$, $v_{th,1} = v_{th,2} = 0.05$, $\alpha = 10^{-6}$ et $v_{max} = 2$. Le taux de l'instabilité électromagnétique faisceau-plasma est pour les deux systèmes $\gamma = 0.161$. On observe que les résultats numériques sont en bon accord avec les prédictions théoriques.

5.3 Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste

5.3.1 Introduction

Les modèles de Vlasov ont longtemps été utilisés pour étudier l'interaction laser-plasma avec des lasers intenses à impulsion très courte. C'est le cas pour les instabilités paramétriques, les ondes de battement, la diffusion Raman et Brillouin ou les mécanismes d'accélération de particules. Puisque les collisions peuvent être négligées le modèle de Vlasov-Maxwell doit être utilisé. Malgré l'importance des résultats analytiques obtenus à partir des modèles fluides tels que les relations de dispersion non linéaires, les taux d'instabilité, les modèles d'enveloppe, la

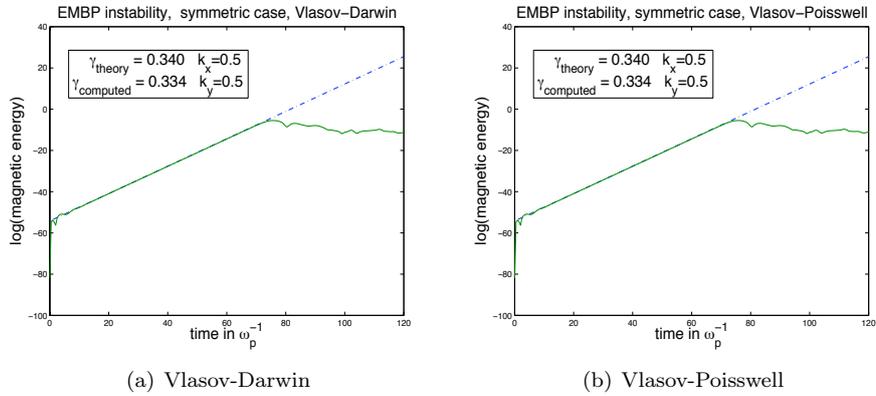


FIGURE 5.1 – Evolution du logarithme de l'énergie magnétique dans le cas symétrique de l'instabilité électromagnétique faisceau-plasma

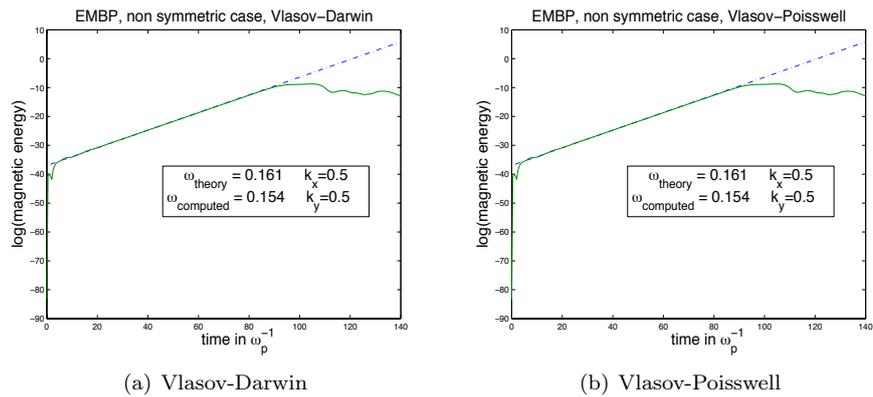


FIGURE 5.2 – Evolution du logarithme de l'énergie magnétique dans le cas non symétrique de l'instabilité électromagnétique faisceau-plasma

partition de Manley-Rowe entre les photons et les plasmons ou les phonons, etc ... l'importance de l'interaction résonante non linéaire onde-particule conduit à une description cinétique relativiste, i.e. l'équation de Vlasov-Maxwell, et donc nécessite d'avoir recours à la simulation numérique pour en obtenir les solutions complexes. Cependant les simulations basées sur les méthodes Lagrangiennes PIC (Particle-In-Cell) ne fournissent pas une description assez précise des processus d'accélération des particules. En effet les codes PIC n'ont pas assez de particules pour décrire de manière détaillée et correcte la structure de l'espace des phases (sur lequel la fonction de distribution est définie) où les particules et la vitesse de phase des ondes sont comparables et où les phénomènes de piégeage ont lieu. Pour des exemples de résultats sur l'interaction laser-plasma, qui utilisent des codes PIC on pourra consulter [136, 218, 45]. D'un autre coté, une résolution directe de l'équation aux dérivées partielles de Vlasov sur une grille de l'espace de phases (codes Vlasov) s'est révélée être un outil puissant pour étudier en détail la dynamique des particules grâce à la très bonne résolution de l'espace des phases [62, 204, 178, 29, 31]. Pour des résultats antérieures concernant l'interaction laser-plasma utilisant des codes Vlasov on peut consulter [144, 145, 11]. Les simulations Vlasov ont lentement remplacé les codes Lagrangiens PIC pour deux raisons principales : l'absence de bruit numérique et la résolution très précise de l'espace des phases, pour peu que la dimension de l'espace des vitesses ne soit pas très grande. L'efficacité des codes Vlasov (en terme de précision et de ressources de calcul) est perdue lorsque le phénomène de filamentation de l'espace des phases est très développé, ce qui nécessite alors d'augmenter de manière importante le nombre total de points de l'espace des phases pour pouvoir suivre cette filamentation. Les modèles numériques semi-Lagrangiens ne sont pas bien adaptés pour décrire des fonctions de distribution singulières de type Dirac ou les filaments très fins de l'espace des phases qui caractérisent l'accélération de particules. Cependant on peut s'attendre à ce que le problème soit résolu en introduisant des grilles de l'espace des phases qui évoluent au cours du temps, avec des mailles petites dans les régions où la solution est singulière et avec des mailles plus grossières dans les régions où la solution est plus régulière. Cette stratégie semble prometteuse pour améliorer les codes Vlasov en termes de performance et de précision. Dans ce paragraphe on introduit un maillage de l'espace des phases à deux dimensions qui peut être raffiné ou déraffiné adaptativement en temps. Pour ce faire, on utilise les techniques basées sur l'analyse multi-résolution de L^2 en ondelettes dans le même esprit que les méthodes développées dans [19, 72, 139].

5.3.2 Le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste

Dans ce paragraphe on présente le modèle de Vlasov-Maxwell relativiste réduit que l'on cherche à approcher. Comme ce modèle a déjà été dérivé dans le Chapitre 2, Sec. 2.3, on donne simplement le résultat. Si on considère un plasma unidimensionnel (direction x) initialement préparé de telle sorte que les particules sont divisées en \mathcal{M} groupes de particules, chaque groupe i , $1 \leq i \leq \mathcal{M}$, ayant le même moment canonique perpendiculaire initial $\mathbf{P}_{c\perp} = \mathcal{P}_{c\perp,i}$, alors le groupe de particules i a une distribution dans l'espace des phases (x, p_x) donnée par la fonction de distribution positive $f_i(t, x, p_x)$ qui est régie par l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \left(eE_x + \frac{1}{2m\gamma_i} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{P}_{c\perp,i} - e\mathbf{A}_\perp(t, x))^2 \right) \frac{\partial f_i}{\partial p_x} = 0, \quad i = 1 \dots \mathcal{M} \quad (5.33)$$

où le champ électromagnétique ($E^\pm = E_y \pm cB_z$, $F^\pm = E_z \pm cB_y$, E_x) est donné par les équations de Maxwell

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{M}} n_i(t, x) - n_0 \right), \quad n_i(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, x, p_x) dp_x, \quad (5.34)$$

ou

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} J_{x,i}(t, x) \quad (5.35)$$

et

$$\frac{\partial E^\pm}{\partial t} \pm c \frac{\partial E^\pm}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} J_{y,i}, \quad \frac{\partial F^\pm}{\partial t} \mp c \frac{\partial F^\pm}{\partial x} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} J_{z,i} \quad (5.36)$$

avec $\mathbf{B}_\perp = \nabla \times \mathbf{A}_\perp$ et $\mathbf{E}_\perp = -\partial_t \mathbf{A}_\perp$. Les densités de courant $J_{x,i}$ et $\mathbf{J}_{\perp,i} = (J_{y,i}, J_{z,i})$ sont données par

$$J_{x,i}(t, x) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} p_x f_i(t, x, p_x) \frac{dp_x}{\gamma_i} \quad (5.37)$$

et

$$\mathbf{J}_{\perp,i}(t, x) = \frac{e}{m} (\mathcal{P}_{c\perp,i} - e\mathbf{A}_\perp) \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t, x, p_x) \frac{dp_x}{\gamma_i}. \quad (5.38)$$

où $\gamma_i^2 = 1 + p_x^2/(m^2 c^2) + (\mathcal{P}_{c\perp,i} - e\mathbf{A}_\perp(t, x))^2/(m^2 c^2)$. Dans la suite nous considérons le cas particulier $\mathcal{M} = 1$, qui correspond à une fonction de distribution d'un plasma froid dans la direction perpendiculaire. Puisque, on ne considère pas de flot moyen transverse on prend $\mathcal{P}_{c\perp,1} = 0$. Dans le contexte de l'interaction laser-plasma, ceci est cohérent avec le fait que l'accélération des particules est très forte dans la direction longitudinale du laser avec des températures $T_\parallel \gg T_\perp$, à condition que l'on puisse négliger les instabilités électromagnétiques (instabilités de Weibel et de filamentation) transverses.

5.3.3 L'analyse multi-résolution de L^2 en ondelettes

Dans cette section on présente les idées principales et l'outil, l'analyse multi-résolution en ondelettes (MRA), que l'on utilise pour construire notre schéma adaptatif. On utilise ici des ondelettes bi-orthogonales [73], qui peuvent s'obtenir de manière systématique une fois qu'on s'est donné une paire de fonctions d'échelles. La fonction d'échelle φ et sa fonction duale $\tilde{\varphi}$ satisfont les équations d'échelles

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \varphi(2x - n), \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x - n) \quad (5.39)$$

où les suites de coefficients $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{h}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, appelées filtres, sont données (ou doivent être construits de telle sorte que les équations d'échelles (5.39) soient satisfaites). On définit alors de nouveaux coefficients $g_n = (-1)^{n+1} \tilde{h}_{1-n}$ et $\tilde{g}_n = (-1)^{n+1} h_{1-n}$, ainsi qu'une paire d'ondelettes

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \varphi(2x - n), \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_n \tilde{\varphi}(2x - n). \quad (5.40)$$

De plus la paire de fonctions d'échelles $(\varphi, \tilde{\varphi})$ et d'ondelettes $(\psi, \tilde{\psi})$ satisfont des relations d'orthogonalité (propriétés de stabilité), i.e.

$$\langle \psi(\cdot), \tilde{\psi}(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}, \quad \langle \psi(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = 0, \quad \langle \varphi(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}, \quad \langle \tilde{\psi}(\cdot), \varphi(\cdot - k) \rangle = 0, \quad (5.41)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre deux fonctions duales. L'orthogonalité des équations (5.41) implique des relations d' "orthogonalité" au niveau des filtres, i.e.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \tilde{h}_{n+2k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \tilde{g}_{n+2k} = \delta_{0,k}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \tilde{g}_{n+2k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \tilde{h}_{n+2k} = 0.$$

Si on utilise les notations $\varphi_k^j(\cdot) = 2^{j/2} \varphi(2^j \cdot - k)$, $\tilde{\varphi}_k^j(\cdot) = 2^{j/2} \tilde{\varphi}(2^j \cdot - k)$, $\psi_k^j(\cdot) = 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k)$, $\tilde{\psi}_k^j(\cdot) = 2^{j/2} \tilde{\psi}(2^j \cdot - k)$ et si on définit $V_j = \text{Span}\{\varphi_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\tilde{V}_j = \text{Span}\{\tilde{\varphi}_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $W_j = \text{Span}\{\psi_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $\tilde{W}_j = \text{Span}\{\tilde{\psi}_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$, alors d'après les relations d'orthogonalité (5.41) on obtient la décomposition des espaces suivante

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j, & \tilde{V}_{j+1} &= \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j, \\ V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_j, & \tilde{V}_{j+1} &= \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j \oplus \cdots \oplus \tilde{W}_j, \end{aligned}$$

avec $j \in \mathbb{Z}$ et où $W_j \perp W_i$ si $i \neq j$ et $\tilde{W}_j \perp \tilde{W}_i$ si $i \neq j$. Les espaces V_j sont définis sur des grilles dyadiques $G_j = \{x_k^j = k2^{-j}, k \in \mathbb{Z}\}$ et satisfont les inclusions $\{0\} \subset \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset$

L^2 . D'après la décomposition des espaces précédente une fonction $f_{j+1} = P_{j+1}f \in V_{j+1}$ peut s'écrire de manière équivalente comme il suit

$$\begin{aligned} f_{j+1} = P_{j+1}f &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{j+1} \varphi_k^{j+1} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi_k^j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_k^j = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_k^j \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^j \varphi_k^j + \sum_{l=j}^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^l \psi_k^l = \sum_{l \leq j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^l \psi_k^l \end{aligned}$$

avec $c_k^j = \langle f, \tilde{\varphi}_k^j \rangle$, $d_k^j = \langle f, \tilde{\psi}_k^j \rangle$, et où P_j désigne l'opérateur de projection sur V_j . Comme on travaille en deux dimensions de l'espace des phases, on peut construire une ondelette multidimensionnelle à partir d'une ondelette unidimensionnelle en utilisant le produit tensoriel. Les ondelettes bi-orthogonales que l'on choisit sont des ondelettes interpolantes, construites sur les polynômes de Lagrange. En fait les interpolettes sont fondées sur un schéma d'interpolation itératif dont l'objectif est de construire un interpolant à partir d'une suite de données. Le schéma d'interpolation itérative de Lagrange, introduit par Deslauriers et Dubuc [87, 88], consiste en une procédure récursive pour trouver une fonction interpolante sur tous les points dyadiques. L'algorithme consiste à insérer un coefficient prédit entre chaque paire de coefficients déjà existants. Puisque les coefficients déjà existants ne sont pas modifiés, l'interpolation de la fonction originale est préservée. Ces schémas d'interpolation itérative sont très utilisés en CAGD pour générer des courbes et des surfaces, par exemple on peut citer le schéma à quatre points [100]. En l'occurrence les filtres qui définissent notre paire de fonctions d'échelles et d'ondelettes sont choisis tels que

$$h_{2n} = \delta_{0,n}, \quad \tilde{h}_n = \delta_{0,n}, \quad \tilde{g}_{2n+1} = \delta_{0,n}, \quad \tilde{g}_{2n} = -a_n \quad (5.42)$$

où les coefficients a_n doivent être prescrits. En utilisant la relation de bi-orthogonalité (5.41), les équations d'échelles (5.39) et (5.40) et le filtre (5.42) on obtient

$$c_k^j = \langle f_{j+1}, \tilde{\varphi}_k^j \rangle = \sum_{n,l \in \mathbb{Z}} c_n^{j+1} \tilde{h}_{l-2k} \langle \varphi_n^{j+1}, \tilde{\varphi}_l^{j+1} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^{j+1} \tilde{h}_{n-2k} = c_{2k}^{j+1}$$

et

$$\begin{aligned} d_k^j = \langle f_{j+1}, \tilde{\psi}_k^j \rangle &= \sum_{n,l \in \mathbb{Z}} c_n^{j+1} \tilde{g}_{l-2k} \langle \varphi_n^{j+1}, \tilde{\varphi}_l^{j+1} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{2n+2k}^{j+1} \tilde{g}_{2n} + c_{2n+2k+1}^{j+1} \tilde{g}_{2n+1} \\ &= c_{2k+1}^{j+1} - \sum_{n=1-N}^N a_n c_{2n+2k}^{j+1} = c_{2k+1}^{j+1} - \sum_{n=1-N}^N a_n c_{n+k}^j \\ &= c_{2k+1}^{j+1} - P_{2N-1}(x_{2k+1}^{j+1}) \end{aligned}$$

où P_{2N-1} représente le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré impair $2N-1$ centré sur le point (x_{2k+1}^{j+1}) . Le coefficient d_k^j représente donc exactement la différence entre la valeur de la fonction dans l'espace V_{j+1} et sa valeur prédite à partir de V_j . Cette stratégie pour construire W_j est en particulier intéressante pour le raffinement adaptatif puisque les coefficients d_k^j seront petits là où la prédiction à partir de V_j sera bonne et seront grands ailleurs; il donne donc un critère de raffinement naturel. En outre on peut passer d'une fonction définie sur une grille dyadique à la même fonction définie maintenant sur une grille dyadique de niveau inférieur par l'opérateur de projection (restriction) \mathcal{P}_{j+1}^j . Réciproquement on peut passer d'une fonction définie sur une grille dyadique à la même fonction définie maintenant sur une grille dyadique de niveau supérieur par l'opérateur de prédiction \mathcal{P}_j^{j+1} . Si on considère deux grilles dyadiques G_j et G_{j+1} alors, les opérateurs de projection et prédiction qui permettent de passer de la suite $\{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ à la suite $\{c_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et réciproquement sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{j+1}^j : G_{j+1} &\longrightarrow G_j \\ \{c_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{c_k^j \mid c_k^j = c_{2k}^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P}_j^{j+1} : G_j \longrightarrow G_{j+1} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{2k}^{j+1} = c_k^j \\ c_{2k+1}^{j+1} = P_{2N-1}(x_{2k+1}^{j+1}) \\ = \sum_n a_n c_{n+k}^j \end{array} \right\}_{\{k \in \mathbb{Z}\}}.$$

L'ondelette ψ peut se déduire facilement de φ . En effet, puisque $g_n = (-1)^{n+1} \tilde{h}_{1-n}$, on a $g_n = \delta_{1,n}$ et en utilisant les équations d'échelles (5.40) on a $\psi_k^j(x) = \varphi_{2k+1}^{j+1}(x)$. La fonction d'échelle φ possède les propriétés suivantes

- (i) *support compact* : φ est exactement nulle en dehors de l'intervalle $[-2N + 1, 2N - 1]$.
- (ii) *interpolation* : φ est interpolante par construction au sens où $\varphi(k) = \delta_{0,k}$.
- (ii) *reconstruction polynômiale et précision d'ordre élevé* : Les polynômes jusqu'au degré $2N - 1$ peuvent s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions d'échelles, i.e.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (k2^{-j})^q \varphi_k^j(x) = x^q, \quad \text{for } 0 \leq q < 2N.$$

- (iii) *régularité* : On a typiquement $\varphi \in \mathcal{C}^\alpha$, où $\alpha = \alpha(N)$. On sait que $\alpha(2) < 2$ et que $\alpha(N)$ croît linéairement avec N . Pour plus de détails sur l'analyse de régularité des ondelettes on peut consulter [71, 81].

On choisira ici $N = 2$ et les coefficients $a_{-1} = a_2 = -\frac{1}{16}$, $a_0 = a_1 = \frac{9}{16}$ et $a_n = 0$ pour les autres. Pour une discussion sur le seuillage, la précision, l'adaptativité et l'optimalité de la méthode on peut consulter [36].

5.3.4 Approximation numérique adaptative

Cette section est dédiée à la description globale de la méthode semi-Lagrangienne adaptative.

Etape 1. Initialisation. Soit j le niveau de la grille la plus grossière et J le niveau le plus fin. Dans la phase d'initialisation, on calcule d'abord la décomposition en ondelettes de la condition initiale f_0 qui est connue analytiquement. Elle est ensuite compressée en supprimant les détails qui sont plus petits qu'un certain seuil ϵ_0 que l'on fixe. On construit alors un maillage adaptatif $G_{\epsilon_0}^0$. Parmi tous les points possibles entre le niveau le plus grossier et le plus fin, le maillage $G_{\epsilon_0}^0$ contient seulement ceux du plus bas niveau et ceux qui correspondent aux détails au-dessus de seuil ϵ_0 . A partir de la décomposition en ondelettes compressée de f_0 on calcule les moments ρ^0 , J_x^0 et \mathbf{J}_\perp^0 en utilisant la méthode décrite dans [36]. On résout l'équation de Poisson (5.34) pour obtenir E_x^0 . On obtient alors $E_x^{1/2}$ en résolvant l'équation d'Ampère (5.35) selon le schéma $E_x^{1/2}(x) = E_x^0(x) - \Delta t J_x^0 / (2\epsilon_0)$. De plus on suppose qu'on connaît des expressions analytiques pour $E^{\pm,0}$, $F^{\pm,0}$, $E^{\pm,-1/2}$, $F^{\pm,-1/2}$ et \mathbf{A}_\perp^0 . Toutes ces hypothèses permettent de démarrer le code de manière auto-cohérente. En fait les quantités E_x , E^\pm et F^\pm sont calculées au temps $t^{n-1/2}$ et les quantités f et \mathbf{A}_\perp sont calculées au temps t^n . On suppose qu'on connaît les quantités $E_x^{n-1/2}$, $E^{\pm,n-1/2}$, $F^{\pm,n-1/2}$, f^n , \mathbf{A}_\perp^n , et \tilde{G}^n alors le schéma numérique ci-dessous permet d'obtenir les mêmes quantités au pas de temps suivant.

Etape 2. Intégration du champ électromagnétique. A partir de la décomposition d'ondelettes compressée f^n connue sur le maillage adaptatif $G_{\epsilon_0}^n$ on calcule de manière adaptative (cf [36]) les moments ρ^n , J_x^n et \mathbf{J}_\perp^n . Alors les champs $(E^{\pm,n+1/2}, F^{\pm,n+1/2})$ et $E_x^{n+1/2}$ sont calculés en intégrant respectivement les équations (5.36) le long des caractéristiques $x \pm ct = \text{constante}$ et l'équation d'Ampère (5.35) sur l'intervalle de temps $[t^{n-1/2}, t^{n+1/2}]$

en utilisant une formule de quadrature d'ordre deux en temps, i.e.

$$\begin{aligned} E_x^{n+1/2}(x) &= E_x^{n-1/2}(x) - \Delta t J_x^n(x)/\varepsilon_0, \\ E^{\pm, n+1/2}(x \pm c\Delta t) &= E^{\pm, n-1/2}(x) - \Delta t J_y^n(x \pm c\Delta t/2)/\varepsilon_0, \\ F^{\pm, n+1/2}(x \mp c\Delta t) &= F^{\pm, n-1/2}(x) - \Delta t J_z^n(x \mp c\Delta t/2)/\varepsilon_0. \end{aligned}$$

On peut faire alors une intégration exacte le long des caractéristiques en utilisant le pas d'espace $\Delta x = c\Delta t$, et par conséquent on obtient

$$J_y^n(x \pm c\Delta t/2) = \frac{1}{2} (J_y^n(x \pm \Delta x) + J_y^n(x)), \quad J_z^n(x \mp c\Delta t/2) = \frac{1}{2} (J_z^n(x \mp \Delta x) + J_z^n(x)).$$

Pour l'étape de prédiction on a besoin de connaître $(E^{\pm, n}, F^{\pm, n})$ et E_x^n . Ils sont obtenus par moyenne, i.e.

$$E_x^n(x) = \frac{1}{2} (E_x^{n-1/2}(x) + E_x^{n+1/2}(x))$$

et

$$E^{\pm, n}(x) = \frac{1}{2} (E^{\pm, n-1/2}(x) + E^{\pm, n+1/2}(x)), \quad F^{\pm, n}(x) = \frac{1}{2} (F^{\pm, n-1/2}(x) + F^{\pm, n+1/2}(x)).$$

Etape 3. Prédiction. On prédit les positions des points (x, p_x) de l'espace des phases où les détails seront importants au temps t^{n+1} en avançant les caractéristiques venant des points du maillage $G_{\varepsilon_0}^n$. Ce nouveau maillage est désigné par $\widetilde{G}_{\varepsilon_0}^n$. Pour cela on utilise un schéma d'Euler en temps, i.e.

$$z^{n+1} = z^n + \Delta t F(t^n, z^n)$$

où

$$z(t) = (x(t), p_x(t)), \quad F(t, z(t)) = \left(\frac{p_x(t)}{m\gamma_1(t, x(t), p_x(t))}, e \left(E_x(t, x(t)) - \frac{(\mathbf{A}_\perp \times \mathbf{B}_\perp)(t, x(t))}{\gamma_1(t, x(t), p_x(t))} \right) \right),$$

avec la notation $z^n = z(t^n)$. Afin de capturer les nouvelles petites échelles et donc de nouveaux phénomènes physiques, on retient les points du maillage à un niveau plus fin que celui du point de départ [36] autour de l'origine de la caractéristique [27].

Etape 4. Construction du maillage $\widehat{G}_{\varepsilon_0}^n$. A partir du maillage prédit $\widetilde{G}_{\varepsilon_0}^n$, on construit le maillage $\widehat{G}_{\varepsilon_0}^n$ où les valeurs de la fonction de distribution au prochain pas de temps seront calculées. Puisque le maillage $\widetilde{G}_{\varepsilon_0}^n$ n'est pas bien adapté à la décomposition en ondelettes, on construit un arbre complet $\widehat{G}_{\varepsilon_0}^n$ qui contient exactement les points nécessaires pour calculer la transformée en ondelettes de f^{n+1} aux points de $\widehat{G}_{\varepsilon_0}^n$.

Etape 5. Transport-Interpolation. On a d'abord besoin de calculer $\mathbf{A}_\perp^{n+1/2}$. Pour cela on utilise un schéma centré en temps $\partial_t \mathbf{A}_\perp = -\mathbf{E}_\perp$. On obtient alors

$$\mathbf{A}_\perp^{n+1}(x) = \mathbf{A}_\perp^n(x) - \Delta t \mathbf{E}_\perp^{n+1/2}(x),$$

et finalement $\mathbf{A}_\perp^{n+1/2}(x)$ est construit en utilisant une moyenne,

$$\mathbf{A}_\perp^{n+1/2}(x) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}_\perp^{n+1}(x) + \mathbf{A}_\perp^n(x)).$$

On remonte les courbes caractéristiques qui se terminent aux points de $\widehat{G}_{\varepsilon_0}^n$ sur un pas de temps Δt , pour trouver l'origine de ces caractéristiques z^n . En intégrant l'équation différentielle ordinaire non linéaire $d_t z(t) = F(t, z(t))$ sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, en utilisant la formule de quadrature du point milieu et l'approximation du second ordre

en temps $z^{n+1/2} = (z^{n+1} + z^n)/2$ on est conduit à résoudre un problème de point fixe en δz

$$\delta z = \Delta t F(t^{n+1/2}, z^{n+1} - \delta z/2)$$

où on pose $\delta z = z^{n+1} - z^n$. Ce point fixe peut être résolu par un algorithme de Newton. On peut alors interpoler la fonction de distribution à l'origine des courbes caractéristiques en utilisant la décomposition en ondelettes de f^n sur le maillage $G_{\epsilon_0}^n$, pour obtenir f^{n+1} sur le maillage $\widehat{G}_{\epsilon_0}^n$.

Etape 6. Transformée en ondelettes et compression. On calcule les nouvelles suites de coefficients $\{c_k^{j,n+1}\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$, $\{d_k^{\ell,n+1}\}_{k \in \mathbb{Z}^2, \ell \in [j, J-1]}$ aux points de $\widetilde{G}_{\epsilon_0}^n$ à partir des valeurs de f^{n+1} connues sur le maillage $\widehat{G}_{\epsilon_0}^n$. On élimine alors les points de $\widetilde{G}_{\epsilon_0}^n$ où les détails $d_k^{\ell,n+1}$ sont inférieurs au seuil $\epsilon_\ell = 2^{-\ell d(1/2-1/p)} \epsilon_0$ du niveau ℓ (cf [36]) et on obtient le nouveau maillage adaptatif $G_{\epsilon_0}^{n+1}$. Finalement la boucle de l'algorithme se referme en revenant à l'étape 2.

5.3.5 Simulations de l'interaction laser-plasma

Afin de montrer l'efficacité de notre algorithme et sa précision d'ordre élevé on a réalisé des simulations qui analysent en détail la dynamique onde-particule rencontrée dans le régime relativiste de l'interaction laser-plasma avec des plasmas sur-denses. Quand une onde électromagnétique se propage dans une couche de plasma, elle devient paramétriquement instable. A de faibles densités ces instabilités sont celles de la diffusion Raman stimulée (SRS). Lorsque les densités sont importantes les effets relativistes donnent lieu à des instabilités modulationnelles relativistes (RMI).

5.3.5.1 L'instabilité paramétrique relativiste

Dans ce paragraphe on simule l'instabilité modulationnelle relativiste générée par une onde pompe (ω_0, k_0) ultra intense dans une boîte périodique. L'onde électromagnétique pompe (ω_0, k_0) , polarisée circulairement à droite ($\nu = +1$) et vérifiant la relation de dispersion $\omega_0^2 = \omega_p^2/\gamma_0 + k_0^2 c^2$, avec $\gamma_0^2 = 1 + p_{osc}^2/m^2 c^2 = 1 + a_0^2$, est initialisée avec une amplitude $a_0 = p_{osc}/mc = \sqrt{3}$, selon l'expression

$$E_y(t=0, x) = E_0 \cos(k_0 x), \quad E_z(t=0, x) = \nu E_0 \sin(k_0 x).$$

Les conditions initiales pour le champ magnétique sont telles que

$$B_y(t=0, x) = -\nu E_0 \frac{k_0}{\omega_0} \sin(k_0 x), \quad B_z(t=0, x) = E_0 \frac{k_0}{\omega_0} \cos(k_0 x).$$

et pour le potentiel vecteur transverse \mathbf{A}_\perp , elles sont données par

$$A_y(t=0, x) = \frac{E_0}{\omega_0} \sin(k_0 x), \quad A_z(t=0, x) = -\nu \frac{E_0}{\omega_0} \cos(k_0 x).$$

La discrétisation de l'espace des phases est choisie de la manière suivante. Le niveau de la grille la plus grossière est $\hat{j}_x = 6$, $\hat{j}_{p_x} = 7$ ($N_x N_{p_x} = 64 \times 128$), et le niveau de la plus fine est $J_x = 9$, $J_{p_x} = 10$, soit trois niveaux de raffinement adaptatif possible. Le seuil ϵ_0 est fixé à 10^{-6} . Dans cet exemple numérique on choisit une fonction de distribution Maxwellienne comme condition initiale, avec une température $T_{\parallel} = 3keV$, i.e $v_{th} = \sqrt{3/511}$. La relation de dispersion numérique donne un taux d'instabilité maximum $\gamma/\omega_p = 0.409$ pour $k_{max}c/\omega_p = 1.469$ alors que le taux obtenu numériquement est 0.403, soit moins de 1.5% d'erreur. On peut observer la croissance de l'énergie électrique sur la figure 5.3. Puisque le mécanisme de génération d'ondes est résonant, l'onde croît exponentiellement jusqu'à ce que les effets non linéaires entraînent le déferlement des ondes et saturent la croissance de l'onde plasma autour du temps $t = 90\omega_p^{-1}$. A la saturation, l'onde plasma a assez d'énergie pour piéger les particules et entraîner la formation

de vortex dans l'espace des phases. De la figure 5.4 à la figure 5.6 on observe la fonction de distribution (à gauche) dans l'espace des phases (x, p_x) et le maillage adaptatif de l'espace des phases associé (à droite).

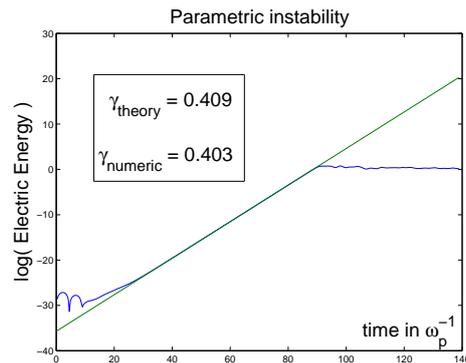


FIGURE 5.3 – Taux d'instabilité et énergie électrique

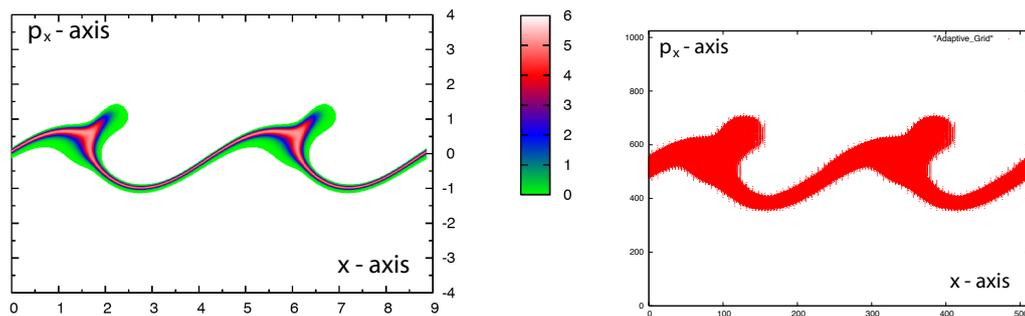
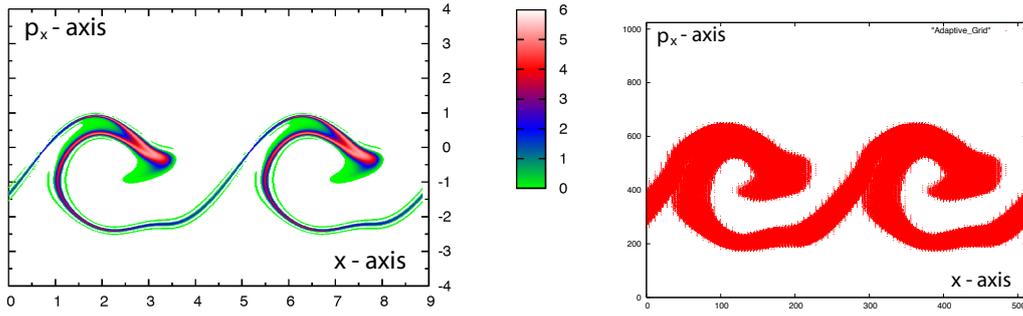
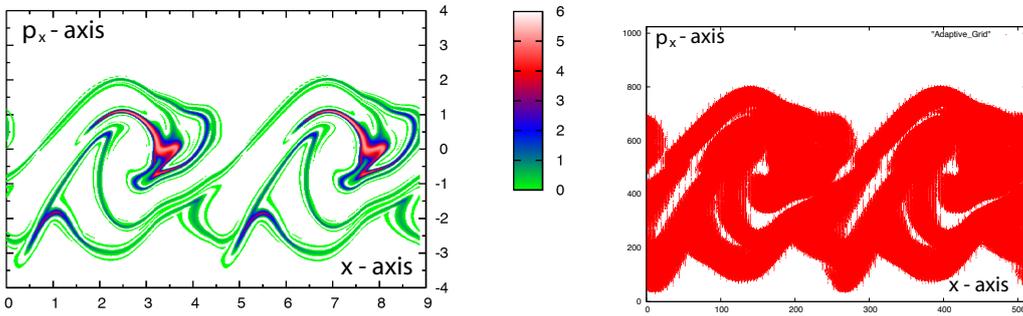


FIGURE 5.4 – $f(t, x, p_x)$ (gauche) et grille adaptative (droite) au temps $t = 90.24\omega_p^{-1}$

5.3.5.2 La transparence auto-induite et les ondes KEEN

Pour ce cas test on prend une couche de plasma fini avec des conditions aux limites transparentes. La fonction de distribution est fixée aux deux bords $x = 0$ et $x = L$ par $f(t, x, p_x) = 0$. L'onde électromagnétique peut se propager dans le système en entrant par le bord gauche et en sortant par le bord droit. Pour une onde polarisée circulairement le champ électromagnétique

FIGURE 5.5 – $f(t, x, p_x)$ (gauche) et grille adaptative (droite) au temps $t = 93.71\omega_p^{-1}$ FIGURE 5.6 – $f(t, x, p_x)$ (gauche) et grille adaptative (droite) au temps $t = 100.65\omega_p^{-1}$

est donné par

$$\begin{aligned} E^+(t, x=0) &= 2E_0 \text{prof}(t) \cos(\omega_0 t), & E^-(t, x=0) &= 0, \\ F^-(t, x=0) &= -2\nu E_0 \text{prof}(t) \sin(\omega_0 t), & F^+(t, x=0) &= 0, \end{aligned}$$

et le potentiel vecteur par

$$A_y(t, x=0) = -\frac{E_0}{\omega_0} \text{prof}(t) \sin(\omega_0 t), \quad A_x(t, x=0) = -\nu \frac{E_0}{\omega_0} \text{prof}(t) \cos(\omega_0 t),$$

où le profil en temps est donné par $\text{prof}(t) = \sin^2(\pi t)/2\tau$ pour $t \leq \tau$ et $\text{prof}(t) = 1$ pour $t \geq \tau$ ($\tau = 50\omega_p^{-1}$). Il est bien connu qu'une onde électromagnétique à haute fréquence avec une fréquence plus petite que la fréquence plasma ($\omega_0 < \omega_p$) ne peut pas se propager. Cependant si l'intensité de l'onde pompe est suffisamment intense pour rendre les électrons relativistes la fréquence de coupure décroît à cause de variation de la masse relativiste. Ici une impulsion laser se propage dans la direction x dans un plasma sur-dense inhomogène où la densité d'électrons est telle que $n_0/n_c = 1.20$. La condition initiale pour les électrons est un équilibre Maxwellien avec $T_{\parallel} = 20 \text{keV}$. La grille la plus grossière est telle que $N_x N_{p_x} = 256 \times 64$, alors que le nombre de niveau de raffinement possible est de trois. Le seuil ϵ_0 est fixé à 10^{-8} . Dans une première étape de pénétration de l'impulsion laser (sur l'intervalle de temps $[0, 550\omega_p^{-1}]$), un effet Doppler relativiste a lieu au niveau du front d'onde mobile et entraîne un phénomène de battement d'ondes entre l'onde pompe et l'onde réfléchi (Fig. 5.7). Ce battement d'ondes conduit à la formation de vortex. Une fois que l'onde pompe a complètement traversé le plasma, celui-ci devient sous-dense et une nouvelle instabilité paramétrique à trois ondes se développe donnant lieu à une onde plasma électronique de type acoustique qui chauffe le plasma de manière cohérente et génère des structures de piégeage (vortex). Ce phénomène s'appelle la transparence auto-induite [1, 116]. Ces structures de piégeage dans l'espace des phases (Fig.

5.8), sont associées à l'excitation de modes électroniques non linéaires auto-entretenus (ondes KEEN, cf section 2.6.7). Ces résultats sont similaires à ce qu'on a obtenu à partir d'un code semi-Lagrangien du même type (schéma en temps "leap-frog" pour l'intégration du champ électromagnétique, méthode semi-Lagrangienne sans splitting, intégration des caractéristiques par résolution d'un problème de point fixe, interpolation par splines cubiques) sur des grilles uniformes [117].

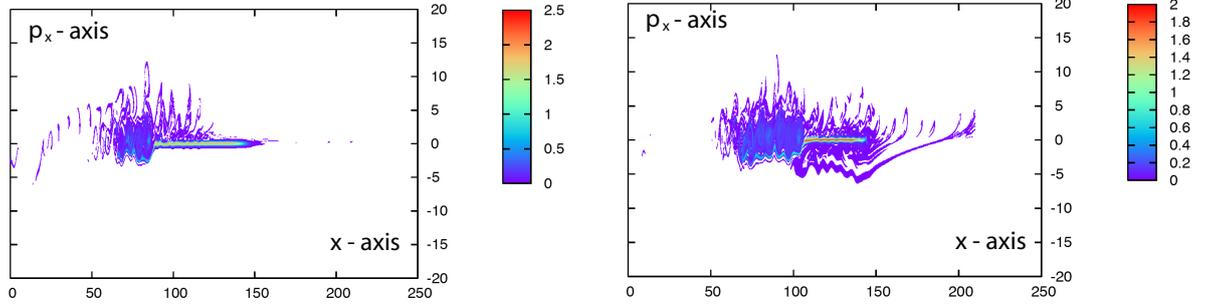


FIGURE 5.7 – (t, x, p_x) aux temps $t = 205.\omega_p^{-1}$ (gauche) et $t = 307.6\omega_p^{-1}$ (droite)

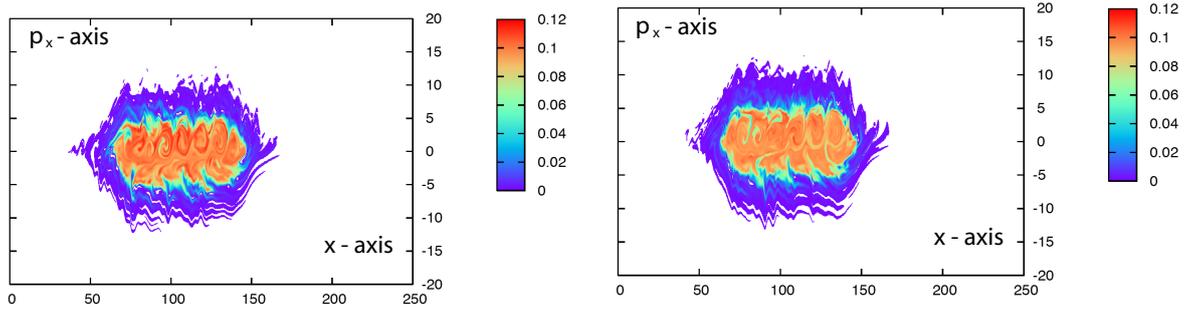


FIGURE 5.8 – (t, x, p_x) aux temps $t = 1128.\omega_p^{-1}$ (gauche) et $t = 1333.\omega_p^{-1}$ (droite)

5.3.5.3 Champ de sillage d'une onde laser et accélération relativiste de particules

Dans ce cas test on s'intéresse à la génération d'un champ de sillage par une onde laser qui semble être une bonne stratégie pour accélérer des particules à des vitesses relativistes [101]. Une onde laser qui a un profil Gaussien en temps, ultra intense et à longueur d'onde ultra courte entre par le bord droit de la boîte de simulation et se propage d'abord dans le vide avant de pénétrer un plasma sous-dense. L'accélération sera maximum si la force pondéromotrice pousse les particules sur une longueur égale à $\lambda_p/2$ (où λ_p la longueur d'onde de l'onde plasma) et si ces particules sont ralenties sur une même longueur. Par conséquent on a besoin d'une impulsion laser de largeur $\tau = 2\pi/\omega_p$, afin que les électrons oscillent à la fréquence plasma ω_p . Comme dans la section 5.3.5.2, la fonction de distribution des électrons initiale est une Maxwellienne avec une température de $3keV$, modulée en espace par une densité inhomogène. Les conditions initiales pour le champ électromagnétique E^\pm , F^\pm et \mathbf{A}_\perp sont les mêmes que dans la section 5.3.5.2 excepté que maintenant le profil est Gaussien, i.e. $\text{prof}(t) = \exp(-\alpha(t - \tau/2)^2)$ pour $t \leq \tau$ et $\text{prof}(t) = 0$ pour $t > \tau$. L'impulsion laser est une onde polarisée circulairement avec une intensité $a_0 = \sqrt{3/2}$ et la densité du plasma est telle que $n_0/n_c = 0.1$. L'espace des phases est échantillonné avec une grille grossière $N_x N_{p_x} = 1024 \times 256$ et trois niveaux de raffinement possible. Le seuil ϵ_0 est fixé à 10^{-8} .

La force pondéromotrice associée au laser pousse les électrons en avant et la réponse du plasma est la génération d'un champ électrique longitudinal qui tend à s'opposer à ce mouvement. Durant cette propagation dans le plasma, l'impulsion laser laisse dans son sillage une onde électrique longitudinale de vitesse de phase $v_\varphi \approx c$ et de longueur d'onde λ_p . De la figure 5.9 à la figure 5.11, on observe la modulation de la fonction de distribution dans l'espace des phases (x, p_x) à des temps différents. Sur la figure 5.9 les pics de la fonction de distribution sont typiquement associés au processus de déferlement des ondes qui est suivi par un forte accélération des électrons dans le champ de sillage de l'onde laser jusqu'à l'impulsion $p_x/mc = 30$. Sur les figures 5.10 et 5.11 (droite) on observe le processus de piégeage des particules qui a lieu entre les positions $x\omega_p/c = 110$ et $x\omega_p/c = 160$ au temps $t = 176\omega_p^{-1}$. Sur la figure 5.11 (gauche) on observe que les électrons sont bien accélérés le long d'une ligne droite comme on peut aussi le constater dans des codes PIC [149, 203]. Par conséquent notre schéma adaptatif est capable de décrire les mêmes fins filaments que reproduisent les codes PIC, alors que cela serait pratiquement impossible avec un maillage fixe de l'espace des phases. L'avantage de l'adaptativité sur les méthodes Euleriennes classiques qui sont construites sur un maillage fixe est qu'on peut suivre l'évolution de ces structures très fines, comme ces filaments étroits associés à l'accélération relativiste des particules, avec un coût de calcul réduit et une capacité de mémoire faible.

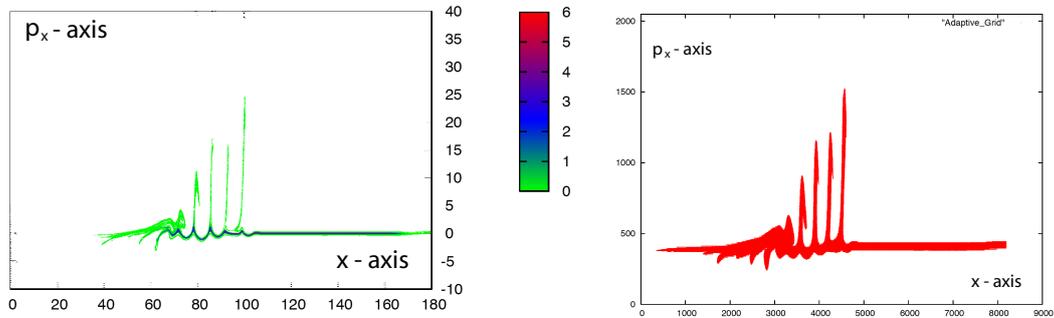


FIGURE 5.9 – $f(t, x, p_x)$ (gauche) et grille adaptative (droite) au temps $t = 110.\omega_p^{-1}$

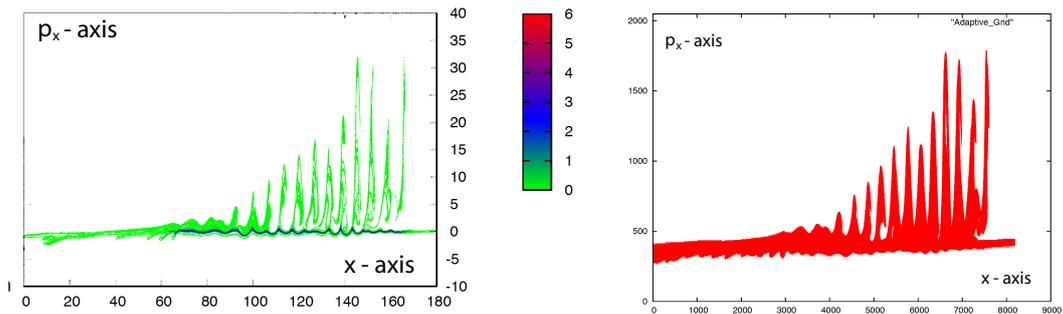


FIGURE 5.10 – $f(t, x, p_x)$ (gauche) et grille adaptative (droite) au temps $t = 176.\omega_p^{-1}$

5.3.6 Analyse de performance

L'analyse de performance présentée dans cette section a été réalisée sur la machine Zahir (IBM eServer p690, p690+, & p655) de l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, CNRS, France). Le calculateur Zahir est un système multi-processeurs à mémoire partagée de 1024 processeurs Power4 et Power4+. Avec une fréquence de

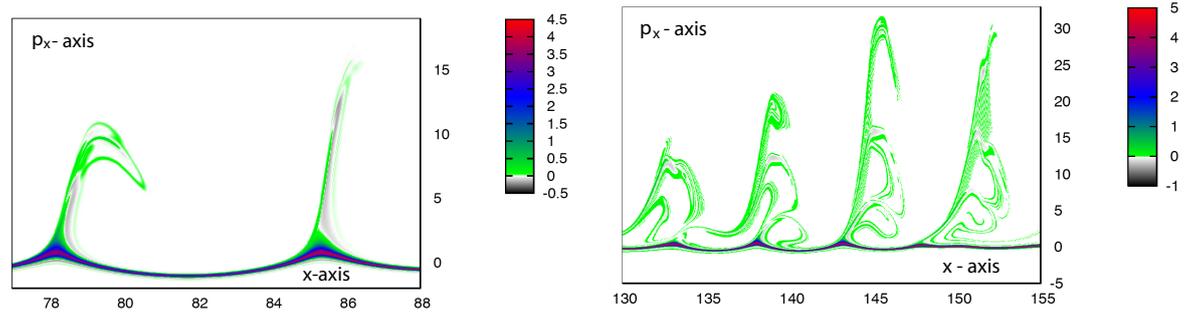


FIGURE 5.11 – Agrandissement local de l'espace des phases

1.3 GHz, la performance théorique de crête est de 5.2 Gflop/s par processeur. L'instruction de niveau 1 à une taille de 64 KB et le cache une taille de 32 KB, alors que le cache et l'instruction secondaire ont une taille de 1.5 MB. Même si notre schéma semi-lagrangien adaptatif décrit dans la section 5.3.4 et notre code semi-Lagrangien non adaptatif sur maillage uniforme [117] sont implémentés en parallèle, toutes les simulations de ce paragraphe ont été réalisées avec un seul processeur afin de mesurer l'efficacité intrinsèque de chaque algorithme numérique et non la méthode de parallélisation. Pour chaque cas test on présente le temps consommé en seconde après 1600 pas de temps. On compare alors le temps donné par deux schémas numériques. Le premier noté "S.-L.-adaptatif" est décrit dans la section 5.3.4. Le second, noté "S.-L.-uniforme" est un schéma semi-Lagrangien classique sur un maillage uniforme [117]. Dans [117], le schéma semi-Lagrangien qu'on a développé est basé sur une grille uniforme de l'espace des phases alors que l'interpolation de la fonction de distribution à l'origine des caractéristiques - calculées comme la solution d'un problème de point-fixe grâce à un algorithme de Newton - est réalisée avec des splines cubiques. Les notations ILPP%RPI, ILPO%SIT and ILPO%LWF réfèrent respectivement aux cas tests 5.3.5.1, 5.3.5.2 et 5.3.5.3. Pour le cas ILPP%RPI, l'algorithme adaptatif démarre avec une fonction de distribution de $2^6 \times 2^{10}$ points ; les niveaux $\hat{j}_x = 6$ et $\hat{j}_{p_x} = 10$; trois niveaux de raffinement ; et un seuil $\epsilon_0 = 10^{-6}$. On désigne cette grille adaptative par $2^{6+3} \times 2^{10+3}$. Dans le cas ILPO%SIT on prend une grille adaptative $2^{8+3} \times 2^{8+3}$ et un seuil $\epsilon_0 = 10^{-8}$. Notons que la taille de la grille uniforme correspondante est pour le schéma "S.-L.-uniforme" de $2^{11} \times 2^{11}$ points. Pour le dernier cas ILPO%LWF le seuil ϵ_0 est fixé à 10^{-8} et la grille adaptative est $2^{10+3} \times 2^{8+3}$. Les temps de calcul sont résumés dans le tableau 5.1.

Cas test.	Scheme	
	S.-L.-adaptatif	S.-L.-uniforme
ILPP%RPI	3000s (50m)	5280s (1h28m)
ILPO%SIT	6060s (1h41m)	8220s (2h17m)
ILPO%LWF	23760s (6h36m)	32992s (9h10m)

TABLE 5.1 – Temps de calcul en secondes

5.4 Le modèle de Vlasov-gyrocinétique

5.4.1 Introduction

Le CEMRACS 2003 marque le début de ma collaboration avec l'équipe "gyrocinétique" du CEA Cadarache (IRFM), constituée entre autres de Xavier Garbet, Philippe Ghendrih, Virginie Grandgirard et Yanick Sarazin. Aujourd'hui cette collaboration se poursuit sous la forme d'un contrat EURATOM-LRC. Pendant l'été 2003, lors du CEMRACS j'ai travaillé

avec Virginie Grandgirard pour mettre au point et améliorer la méthode numérique semi-Lagrangienne qui est maintenant le coeur du code GYSELA développé au CEA Cadarache [131, 133]. C'est sur la base de cet algorithme que le code GYSELA a poursuivi ses développements récents [197, 113, 132], notamment avec l'ajout des effets de courbure et de gradient du champ magnétique. Le code GYSELA résout les équations de Vlasov-gyrocinétique en géométrie torique (équations (3.1) et (3.6)) et en géométrie cylindrique (équations (3.5)-(3.6)). Dans cette section nous présenterons l'algorithme de résolution et des résultats numériques dans le cas cylindrique. Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction du Chapitre 3, l'étude de la turbulence gyrocinétique (générée par les micro-instabilités qui se développent au sein du plasma) est primordiale pour calculer les diffusivités thermiques turbulentes dont dépend le temps de confinement de l'énergie dans un plasma de fusion. L'approche cinétique apparait essentielle car l'interaction résonante non linéaire onde-particule joue un rôle important dans la quantification du niveau de la turbulence.

5.4.2 Approximation numérique

Dans ce paragraphe on présentera brièvement la méthode pour résoudre les équations (3.5)-(3.6) car elle repose sur les mêmes ingrédients que celle développée pour les systèmes Vlasov-Darwin et Vlasov-Poiswell dans le paragraphe 5.2.3. Puisque le champ de vecteur qui génère le flot Lagrangien dans l'espace des phases est à divergence nulle (propriété d'incompressibilité de l'espace des phases), i.e.

$$\nabla_{\perp} \cdot (\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}}) + \partial_z(v_{\parallel}) + \partial_{v_{\parallel}}(\mathcal{J}_{\mu} E_z) = 0$$

alors l'équation de Vlasov-gyrocinétique peut se réécrire sous la forme conservative suivante

$$\partial_t f_{\mu} + \nabla_{\perp} \cdot (\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}} f_{\mu}) + \partial_z(v_{\parallel} f_{\mu}) + \frac{q_i}{m_i} \partial_{v_{\parallel}}(\mathcal{J}_{\mu} E_{\parallel} f_{\mu}) = 0 \quad (5.43)$$

L'équation (5.43) peut être résolue (cf [145]) en la décomposant ("splitting" en temps) en trois équations de transport écrites sous forme conservative

$$\partial_t f_{\mu} + \nabla_{\perp} \cdot (\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}} f_{\mu}) = 0, \quad (5.44)$$

$$\partial_t f_{\mu} + \partial_z(v_{\parallel} f_{\mu}) = 0, \quad (5.45)$$

$$\partial_t f_{\mu} + \frac{q_i}{m_i} \partial_{v_{\parallel}}(\mathcal{J}_{\mu} E_{\parallel} f_{\mu}) = 0. \quad (5.46)$$

Puisque on a $\nabla_{\perp} \cdot (\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}}) = 0$, $\partial_z(v_{\parallel}) = 0$ et $\partial_{v_{\parallel}}(\mathcal{J}_{\mu} E_z) = 0$, le système conservatif (5.44)-(5.46) est équivalent aux équations de transport suivantes écrites sous forme advective

$$\partial_t f_{\mu} + \mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}} \nabla_{\perp} f_{\mu} = 0 \quad (5.47)$$

$$\partial_t f_{\mu} + v_{\parallel} \partial_z f_{\mu} = 0 \quad (5.48)$$

$$\partial_t f_{\mu} + \frac{q_i}{m_i} \mathcal{J}_{\mu} E_{\parallel} \partial_{v_{\parallel}} f_{\mu} = 0 \quad (5.49)$$

où $\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{v}_{\mathbf{E}} = \mathbf{v}_{\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{E}}$. Puisque la fonction de distribution est constante le long des courbes caractéristiques associées à chaque opérateur de transport, le schéma numérique est basé sur la résolution des trois équations d'vection (5.47)-(5.49) par une méthode semi-Lagrangienne en arrière, c'est à dire en résolvant l'origine de l'ensemble des courbes caractéristiques associées à chaque équation de transport du premier ordre, qui se terminent en un point du maillage sur un pas de temps fractionnaire comme cela est fait dans la section 5.2.3.1. Soit $\mathcal{T}_{r,\theta}(t)$ l'opérateur d'évolution associé à l'équation de transport (5.47), $\mathcal{T}_z(t)$ l'opérateur d'évolution associé à l'équation de transport (5.48) et $\mathcal{T}_{v_{\parallel}}(t)$ l'opérateur d'évolution associé à l'équation de transport (5.49). Le splitting de Strang qui permet d'obtenir une approximation d'ordre deux en temps de l'opérateur d'évolution global $\mathcal{T}(t)$ s'écrit

$$\mathcal{T}(2\Delta t) = \mathcal{T}_{v_{\parallel}}(\Delta t) \circ \mathcal{T}_z(\Delta t) \circ \mathcal{T}_{r,\theta}(2\Delta t) \circ \mathcal{T}_z(\Delta t) \circ \mathcal{T}_{v_{\parallel}}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (5.50)$$

La résolution des courbes caractéristiques (ici des droites) associées aux équations de transport (5.48) et (5.49) est immédiate puisqu'il s'agit d'advections à coefficients constants. Par contre la résolution des courbes caractéristiques associées à l'équation de transport (5.47) est plus délicate. En effet si considère l'action de l'opérateur d'évolution $\mathcal{T}_{r,\theta}(2\Delta t)$ entre les instants $t - \Delta t$ et $t + \Delta t$, la valeur du champ électrique au temps t est nécessaire si on veut conserver un schéma d'ordre deux en temps (formule de quadrature du point milieu en temps). Cette valeur est calculée en utilisant deux fonctions de distribution décalées entre elles d'un pas de temps Δt . En utilisant une approximation parabolique pour approcher la caractéristique au temps t et puisque l'équation différentielle du premier ordre des courbes caractéristiques est à la fois à condition finale et initiale on est amené à résoudre un problème de point fixe par une méthode de Newton ou de Taylor. L'interpolation de la fonction de distribution à l'origine des caractéristiques est réalisée en reconstruisant la fonction de distribution sur tout l'espace des phases par des splines cubiques. En ce qui concerne le champ et le potentiel électrique ainsi que l'opérateur de gyromoyenne, ils sont résolus comme cela a été fait dans le paragraphe 3.10.1 du Chapitre 3.

L'algorithme global de résolution s'écrit de la manière suivante. Si on suppose que l'on connaît la fonction de distribution au temps t^{n-1} et t^n , alors on effectue les étapes suivantes

1. On calcule $\mathcal{J}_\mu E(t^n)$ à partir des fonctions de distribution $f_\mu(t^n)$ et de l'équation de quasi-neutralité (3.6) où cette dernière et l'opérateur de gyromoyenne sont résolus dans le paragraphe 3.10.1.
2. On calcule les fonctions de distribution $f_\mu^{n+1} = f_\mu(t^n + \Delta t)$ en utilisant les fonctions de distribution $f_\mu^{n-1} = f_\mu(t^n - \Delta t)$ et le champ électrique $\mathcal{J}_\mu E(t^n)$ selon l'algorithme de décomposition (5.50) et le principe semi-Lagrangien décrit plus haut, i.e.

$$\begin{aligned}
\bullet f_\mu^{(1)}(r, \theta, z, v_\parallel) &= \mathcal{T}_{v_\parallel}(\Delta t) f_\mu^n = f_\mu^*(r, \theta, z, v_\parallel - \Delta t \mathcal{J}_\mu E_z(t^n)). \\
\bullet f_\mu^{(2)}(r, \theta, z, v_\parallel) &= \mathcal{T}_z(\Delta t) f_\mu^{(1)} = f_\mu^{(1)}(r, \theta, z - v_\parallel \Delta t, v_\parallel). \\
\bullet f_\mu^{(3)}(r, \theta, z, v_\parallel) &= \mathcal{T}_{r,\theta}(2\Delta t) f_\mu^{(2)} \\
&= f_\mu^{(2)}(r(x^*, y^*), \theta(x^*, y^*), z, v_\parallel)
\end{aligned}$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x)$, $X^* = (x^*, y^*) = X - 2d^*$, où $X = (x, y)$ est un point du maillage \mathcal{M}_h et $d^* = (d_x^*, d_y^*)$ est la solution du point fixe $d = \Delta t \mathbf{v} \cdot \mathcal{J}_\mu \mathbf{E}(t^n, X - d)$ en la variable d , résolu par une méthode de Newton ou de Taylor.

$$\begin{aligned}
\bullet f_\mu^{(4)}(r, \theta, z, v_\parallel) &= \mathcal{T}_z(\Delta t) f_\mu^{(3)} = f_\mu^{(3)}(r, \theta, z - v_\parallel \Delta t, v_\parallel). \\
\bullet f_\mu^{n+1}(r, \theta, z, v_\parallel) &= \mathcal{T}_{v_\parallel}(\Delta t) f_\mu^{(4)} = f_\mu^{(4)}(r, \theta, z, v_\parallel - \Delta t \mathcal{J}_\mu E_z(t^n)).
\end{aligned}$$

3. Algorithme leap-frog :

$$\begin{aligned}
f_\mu(t^{n-1}) &\text{ est remplacée par } f_\mu(t^n) \\
f_\mu(t^n) &\text{ est remplacée par } f_\mu(t^{n+1})
\end{aligned}$$

5.4.3 Instabilité ITG

Le cas physique que l'on étudie est l'instabilité de gradient de température ionique aussi traité dans le paragraphe 3.11.2 du Chapitre 3. La condition initiale est semblable à celle du paragraphe 3.11.2.

5.4.3.1 Régime linéaire

La validation de la phase linéaire est réalisée en vérifiant le taux de croissance du mode $(m, n) = (8, 2)$ dont la valeur analytique est égale à $\gamma = 6.259 \times 10^{-3}$ [131]. Le taux numérique

$\Delta t/\Omega_0$	0.1	0.5	2	8	10
$\max(R(L^1))$ en %	1.7×10^{-4}	7.9×10^{-4}	2.7×10^{-3}	3.1×10^{-4}	3.4×10^{-3}
$\max(R(L^2))$ en %	2.6×10^{-1}	1.8×10^{-2}	2.5×10^{-4}	2.2×10^{-5}	2.2×10^{-5}
$\max(R(S))$ en %	1.8×10^{-7}	9.0×10^{-5}	4.5×10^{-4}	5.4×10^{-4}	6.0×10^{-4}
$\max(R(\mathcal{E}_{\text{tot}}))$ en %	1.76	13.3	60	93	97

TABLE 5.2 – Valeurs maximum entre $t = 0$ et $t = 3000/\Omega_0$ des erreurs relatives en pourcentage de la norme L^1 , la norme L^2 , l'entropie S et l'énergie totale \mathcal{E}_{tot}

γ_{num} est calculée par une interpolation linéaire entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final de la phase de croissance exponentielle de l'énergie électrique $t = 500/\Omega_0$ (Ω_0 est la fréquence cyclotronique), i.e. $\gamma_{\text{num}} = \frac{1}{t} \left(\ln \left(\sqrt{\int d\theta dz |\phi(r_0, \theta, z)|^2} \right) - \beta \right)$. La valeur numérique obtenue est égale à 6.15×10^{-3} , ce qui est en bon accord avec la valeur analytique (erreur relative de 2%).

5.4.3.2 Régime non linéaire

La structure Hamiltonienne du système Vlasov-gyrocinétique (3.5)-(3.6) implique que l'énergie totale $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_{\text{kin}} + \mathcal{E}_{\text{pot}}$ où

$$\mathcal{E}_{\text{kin}} = 2\pi \frac{\Omega_i}{q_i} \sum_{\mu \in \Xi} \int f_{\mu} \left(\mu B + \frac{1}{2} m_i v_{\parallel}^2 \right) dV \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{q_i}{2} \int \left(2\pi \frac{\Omega_i}{q_i} \sum_{\mu \in \Xi} \int \mathcal{J}_{\mu} f_{\mu} dv_{\parallel} - n_{i0} \right) \phi dr$$

avec $dV = dr dv_{\parallel} = r dr d\theta dz dv_{\parallel}$, est conservée ainsi que l'entropie cinétique et toutes les normes L^p de la fonction de distribution f_{μ} .

Le tableau 5.2, donne l'erreur relative, notée $R(\mathcal{I})$, de certains invariants \mathcal{I} pour une discrétisation de l'espace des phases de 64 points dans chaque direction. Les résultats du tableau 5.2 montrent que le code semi-Lagrangien conserve un certain nombre d'invariants du système avec une bonne précision. Pour un pas de temps $\Delta t = 0.1/\Omega_0$, la norme L^1 , la norme L^2 et l'entropie sont conservées avec une erreur relative inférieure à 0.3%. L'erreur relative de l'énergie reste en dessous de 2% pendant toute la phase non linéaire. Les valeurs maximum (prise entre $t = 0$ et $t = 3000/\Omega_0$) des erreurs relatives, reportées dans le tableau 5.2 montrent que les tests sur la conservation des normes L^p ($p = 1, 2$) et de l'entropie sont nécessaires pour la validation du code dans la phase non linéaire mais ne sont pas suffisants. En effet pour un pas de temps $\Delta t = 10/\omega_0$ ces trois quantités sont conservées avec une précision meilleure que 0.004% alors que l'erreur relative sur l'énergie totale atteint une valeur inacceptable de 97%. La conservation de l'énergie totale apparait comme le test de validation le plus difficile à réaliser. L'évolution temporelle du flux de chaleur

$$Q(t, r) = 2\pi \frac{\Omega_i}{q_i} \sum_{\mu \in \Xi} \int f_{\mu} \left(\mu B + \frac{1}{2} m_i v_{\parallel}^2 \right) \mathbf{v}_{\mathcal{J}_{\mu} \mathbf{E}} \cdot \mathbf{e}_r \frac{d\theta}{2\pi} \frac{dz}{L_z}$$

au point $r = r_0$ et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}}(t)$ sont tracées sur la figure 5.12 pour quatre pas de temps $\Delta t = 0.1/\omega_0$, $\Delta t = 0.5/\omega_0$, $\Delta t = 2/\omega_0$ et $\Delta t = 8/\omega_0$. Cette figure montre qu'une erreur relative de 93% sur l'énergie totale entraîne des modifications significatives sur les résultats physiques. Cependant une erreur relative de l'énergie totale autour de 10% conduit à de faibles différences du flux de chaleur et de l'énergie potentielle Fig. 5.12.

Le code ne permet pas seulement de conserver l'énergie totale avec une erreur relative inférieure à 2% (pour $\Delta t = 0.1/\omega_0$) mais permet aussi de simuler la turbulence dans le régime non linéaire lorsque celle-ci est bien développée. En effet la figure 5.13 montre l'évolution de l'énergie cinétique, potentielle et totale jusqu'au temps $t = 9500/\Omega_0$ pour le maillage ($128 \times 256 \times 128 \times 64$) dans les directions $(r, \theta, z, v_{\parallel})$ et un pas de temps $\Delta t = 0.5/\omega_0$.

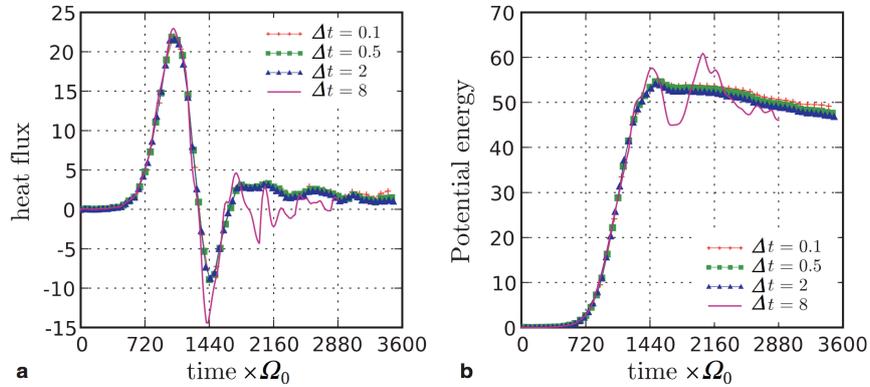


FIGURE 5.12 – Evolution en temps du flux de chaleur Q (a) au point $r = r_0$ et de l'énergie potentielle (b) pour quatre pas de temps $\Delta t = 0.1/\omega_0$, $\Delta t = 0.5/\omega_0$, $\Delta t = 2/\omega_0$ et $\Delta t = 8/\omega_0$.

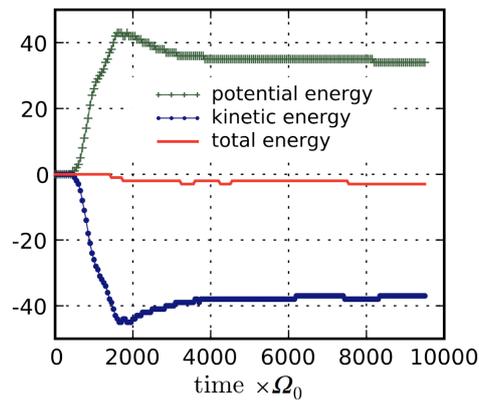


FIGURE 5.13 – Evolution de l'énergie cinétique, potentielle et totale pour un maillage $(128 \times 256 \times 128 \times 64)$ dans les directions $(r, \theta, z, v_{\parallel})$ et un pas de temps $\Delta t = 0.5/\omega_0$

Conclusions et perspectives

Comme nous venons de le voir ce travail regroupe un ensemble de résultats dans le domaine des mathématiques appliquées à la physique des plasmas, allant de la modélisation mathématique à la simulation numérique des modèles en passant par l'analyse mathématique de ces modèles et des méthodes numériques que l'on a développées pour les résoudre.

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. En premier lieu un effort important de recherche sera mis sur la modélisation mathématique et la simulation numérique de plasmas magnétisés de fusion à travers les modèles gyro-water-bag et les modèles gyrocinétiques en variables non canoniques classiques ou en variables action-angle. On souhaite tout d'abord ajouter les effets de courbure et de gradient du champ magnétique ce qui est déjà en cours pour l'analyse linéaire. Par ailleurs on a commencé une étude comparative entre les modèles réduits gyro-water-bag et le modèle Vlasov-gyrocinétique dans le cas de la géométrie cylindrique pour valider ce concept de réduction dans des situations physiques réelles. En outre la comparaison des divers modèles réduits obtenus, leurs analyses mathématiques et leurs approximations numériques restent une perspective de recherche très riche. Comme nous l'avons vu les méthodes numériques développées pour la physique des plasmas s'appliquent aussi dans le cadre de l'astrophysique, c'est pourquoi nous souhaitons aussi développer cet axe de recherche. En ce qui concerne l'interaction laser-plasma (fusion par confinement inertiel) nous souhaitons enrichir la physique de nos modèles en ajoutant la dynamique Vlasovienne des ions, et une description cinétique de la dynamique transverse, ce qui nous conduira à considérer de nouveaux algorithmes numériques pour résoudre ce problème de dimension supérieure. Nous souhaitons aussi développer de nouvelles méthodes numériques parallèles performantes sur des maillages adaptatifs et sans maillages pour la physique des plasmas fondamentale. Enfin un dernier axe de recherche concerne certains problèmes fondamentaux en physique des plasmas, comme le traitement de la filamentation, la validité de l'approche statistique (équation de Vlasov) lorsque les effets de grains (corrélations multiples) existent et la validité de la théorie quasi-linéaire sur laquelle repose un grand nombre de développements analytiques et numériques en physique des plasmas.

Les travaux futurs s'inscriront dans le cadre d'une collaboration pluridisciplinaire associant des chercheurs de l'équipe "Plasmas Chauds" de l'Institut Jean Lamour via le projet STeFI (Sciences et Techniques de la Fusion-ITER), des mathématiciens appliqués du projet INRIA CALVI (CALcul et VISualisation) localisé à Nancy (Institut de mathématique Elie Cartan de Nancy, IECN) et Strasbourg (Institut Recherche Mathématiques Avancées, IRMA) et des physiciens de l'Institut de Recherche sur la Fusion Magnétique (IRFM) au CEA Cadarache avec lesquels je travaille activement notamment grâce au contrat LRC (Laboratoire de Recherche Correspondant) entre mon laboratoire et le CEA de Cadarache.

Bibliographie

- [1] B.B. Afeyan, K. Won, V. Savchenko, T.W. Johnston, A. Ghizzo and P. Bertrand, *Kinetic Electrostatic Electron Nonlinear Waves and their Interactions driven by the ponderomotive force of crossing laser beams*, in “Proceeding of the Third International Conference on Inertial Fusion Sciences and Applications” MO34, Monterey, California, 2003, edited by B. Hammel, D. Meyer-Hofer, L. Meyer-ter-Vehn and H. Azechi (American Nuclear Society, LaGrange Park, IL, 2004), p. 213.
- [2] M. Albrecht-Marc, A. Ghizzo, T. W. Johnston, T. Réveillé, D. Del Sarto, and P. Bertrand, *Saturation process induced by vortex-merging in numerical Vlasov-Maxwell experiments of stimulated Raman backscattering*, Phys. Plasmas, **14** (2007), 072704.
- [3] S. Alinhac, P. Gérard, “Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser”, édition CNRS, 1991.
- [4] H. Andréasson, *The Einstein-Vlasov system/Kinetic theory*, Living Rev. Relativity, **8**, (2005), 2. <http://www.livingreviews.org/lrr-2005-2>
- [5] H. Andréasson, *On global existence for the spherically symmetric Einstein-Vlasov system in Schwarzschild coordinates*, Indiana Univ. Math. Journal. **56** (2007), 523–552.
- [6] H. Andréasson, G. Rein, *A numerical investigation of stability states and critical phenomena for the spherically symmetric Einstein-Vlasov system*, Class Quantum Gravity, **23** (2006), 3659–3677.
- [7] G. A. Baker, W. N. Jureidini, O. A. Karakashian, *A piecewise solenoidal vector fields and the stokes problem*, SIAM J. Numer. Anal., **27** (1990), 1466–1485.
- [8] D. S. Balsara, D. S. Spicer, *A piecewise solenoidal vector fields and the stokes problem*, J. Comput. Phys., **149** (1999), 270–292.
- [9] F. Bastin, P. Laubin, *Regular compactly supported wavelets in Sobolev spaces*, Duke Math. J., **87** (1996), 481–508.
- [10] M.L. Bégue, A. Ghizzo, P. Bertrand, *Two-dimensional Vlasov simulation of Raman scattering and plasma beatwave acceleration on parallel computers*, J. Comput. Phys., **151** (1999), 458–478.
- [11] M.L. Bégué, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, O. Coulaud, *Two-dimensional semi-Lagrangian Vlasov simulations of laser-plasma interaction in the relativistic regime*, J. Plasma Physics, **62** (1999), 367–388.
- [12] D.Y. Benney, *Some properties of long nonlinear waves*, Stud. Appl. Math., **52** (1973), 45–50.
- [13] H.L. Berk and K.V. Roberts, *The water bag model*, in Methods in Computational Physics, vol. 9, Academic Press (1970).
- [14] R. Bermejo, *Analysis of an algorithm for the Galerkin-characteristic method*, Numer. Math., **60** (1991), 163–194.
- [15] R. Bermejo, *Analysis of a class of quasi-monotone and conservative semi-Lagrangian advection schemes*, Numer. Math., **87** (2001), 597–623.
- [16] F. Berthelin and F. Bouchut, *Solution with finite energy to a BGK system relaxing to isentropic gas dynamics*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, **9** (2000), 605–630.

- [17] F. Berthelin and F. Bouchut, *Kinetic invariant domains and relaxation limit from a BGK model to isentropic gas dynamics*, Asymptotic analysis, **31** (2002), 153–176.
- [18] F. Berthelin and F. Bouchut, *Relaxation to isentropic gas dynamics for a BGK system with single kinetic entropy*, Methods and Applications of Analysis, **9** (2002), 313–327.
- [19] S. Bertoluzza, *An adaptive collocation method based on interpolating wavelets*, Multiscale wavelet methods for partial differential equations, 109–135, Wavelet Anal. Appl., 6, Academic Press, San Diego, CA, 1997.
- [20] P. Bertrand, *Contribution à l'étude de modèles mathématiques de plasmas non collisionnels*, Ph.D. Thesis, Université de Nancy, France (1972).
- [21] P. Bertrand and M.R. Feix, *Non-linear electron plasma oscillations : comments on recent developments, and non-linear frequency shift for water bag model*, Plasma Phys., **18** (1976), 655–658.
- [22] P. Bertrand, M. Gros and G. Baumann, *Nonlinear plasma oscillations in terms of multiple-water-bag eigenmodes*, Phys. Fluids, **19** (1976), 1183–1188.
- [23] P. Bertrand, J.P. Doremus, G. Baumann and M.R. Feix, *Stability of inhomogeneous two-stream plasma with a water-bag model*, Phys. Fluids, **15** (1972), 1275–1281.
- [24] P. Bertrand and M.R. Feix, *Non linear electron plasma oscillation : The "water bag model"*, Phys. Lett., **28A** (1968), 68–69.
- [25] P. Bertrand and M.R. Feix, *Frequency shift of non linear electron plasma oscillation*, Phys. Lett., **29A** (1969), 489–490.
- [26] I.B. Bernstein, J.M. Greene and M.D. Kruskal, *Exact non linear plasma oscillations*, Phys. Rev., **108** (1957), 546–550.
- [27] N. Besse, *Etude mathématique et numérique de l'équation de Vlasov non linéaire sur des maillages non structurés de l'espace des phases*, Ph.D. Thesis, publication IRMA, université de Louis Pasteur, Strasbourg, 2003
- [28] N. Besse, F. Filbet, M. Gutnic, I. Paun, E. Sonnendrücker, *An adaptive numerical method for the Vlasov equation based on a multiresolution analysis*, Numerical Mathematics and Advanced Applications, Eds F. Brezzi, A. Buffa, S. Escorsaro, A. Murli, Springer (2003), 437–446, ENUMATH 2001.
- [29] N. Besse, E. Sonnendrücker, *Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space*, J. Comput. Phys., **191** (2003), 341–376.
- [30] N. Besse, *Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one-dimensional Vlasov-Poisson system*, SIAM J. Numer. Anal., **42** (2004), 350–382.
- [31] N. Besse, J. Segré, E. Sonnendrücker, *Semi-Lagrangian schemes for the two-dimensional Vlasov-Poisson system on unstructured meshes*, Trans. Theo. Stat. Phys., **34** (2005), 311–332.
- [32] N. Besse, D. Kröner, *Convergence of locally divergence-free discontinuous-Galerkin methods for the induction equations system of the 2D-MHD*, ESAIM : M2AN, **39** (2005), 1177–1202.
- [33] N. Besse, N.J. Mauser, E. Sonnendrücker, *Numerical approximation of self-consistent Vlasov models for low-frequency electromagnetic phenomena*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., **17** (2007), 361–374.
- [34] N. Besse, M. Mehrenberger, *Convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system*, Math. Comp., **77** (2008), 93–123.
- [35] N. Besse, *Convergence of a high-order semi-Lagrangian scheme with propagation of gradients for the Vlasov-Poisson system*, SIAM, J. Numer. Anal., **46** (2008), 639–670.
- [36] N. Besse, G. Latu, A. Ghizzo, E. Sonnendrücker, P. Bertrand, *A Wavelet-MRA-based adaptive semi-lagrangian method for the relativistic Vlasov-Marwell system*, J. Comput. Phys., **227** (2008), 7889–7916.
- [37] N. Besse, P. Bertrand, *Quasilinear analysis of the gyro-water-bag model*, Europhys. Lett., **83** (2008), 25003.

- [38] N. Besse, P. Bertrand, P. Morel, E. Gravier, *Weak turbulence theory and simulation of the gyro-water-bag model*, Phys. Rev. E, **77** (2008), 056410.
- [39] N. Besse, F. Berthelin, Y. Brenier, P. Bertrand, *The multi-water-bag equations for collisionless kinetic modeling*, Kinetic and Related Models, **2** (2009), 39–90.
- [40] N. Besse, P. Bertrand, *The gyro-water-bag approach in nonlinear gyrokinetic turbulence*, J. Comput. Phys., **228** (2009), 3973–3995.
- [41] P. Bechouche, N. Besse, *Analysis of a semi-Lagrangian method for the spherically symmetric Vlasov-Einstein system*, Accepté dans ESAIM : M2AN.
- [42] N. Besse, *On the Cauchy problem for the gyro-water-bag model*, soumis.
- [43] N. Besse, *On the water-bag continuum*, soumis.
- [44] M. Bézard, *Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport*, Bull. Soc. Math. France, **122** (1994), 29–76.
- [45] C.K. Birdsall, A.B. Langdon, “Plasmas physics via computer simulation”, McGraw-Hill, 1985.
- [46] J.-M. Bony, *Résolution des conjectures de Calderón et espaces de Hardy [d’après R. Coifman, G. David, A. McIntosh, Y. Meyer]*, Astérisque, **92-93** (1982), 293–300.
- [47] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, *Kinetic equations and asymptotic theory*, Series in Applied Mathematics, P.G. Ciarlet and P.-L. Lions (Eds.) Gauthier-villars (2000).
- [48] J. U. Brackbill, D. C. Barnes *The effect of nonzero $\nabla \cdot \mathbf{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations*, J. Comput. Phys., **35** (1980), 426.
- [49] Y. Brenier, *Une application de la symétrisation de Steiner aux équations hyperboliques : La méthode de transport et écroulement*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., **292** (1981), 563–566.
- [50] Y. Brenier, *Résolution d’équations d’évolution quasilinéaires en dimension N d’espace à l’aide d’équations linéaires en dimension $N + 1$* , J. Differential Equations, **50** (1983), 375–390.
- [51] Y. Brenier, *Averaged multivalued solutions for scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., **21** (1984), 1013–1037.
- [52] Y. Brenier, *Homogeneous hydrostatic flows with convex velocity profiles*, Nonlinearity, **12** (1999), 495–512.
- [53] Y. Brenier and L. Corrias, *A kinetic formulation for multi-branch entropy solutions of scalar conservation laws*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. non linéaire, **15** (1998), 169–190.
- [54] A. J. Brizard, T. S. Hahm, *Foundations of nonlinear gyrokinetic theory*, Rev. Mod. Phys., **79** (2007), 421–468.
- [55] A. J. Brizard, *New variational principle for the Vlasov-Maxwell equations*, Phys. Rev. Lett., **84** (2000), 5768–5771.
- [56] A.-P. Calderón, *Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators*, Proc Nat. Acad. Sci. U.S.A., **74** (1977), 1324–1327.
- [57] J. Candy, R.E. Waltz, *An Eulerian gyrokinetic-Maxwell solver*, J. Comput. Phys., **186** (2003), 545–581.
- [58] K.M. Case, *Plasma oscillations*, Annal of physics, N.Y., **7** (1959), 349–364.
- [59] C.Q. Chen, P.G. Lefloch, *Compressible Euler equations with general pressure law*, Arch. Rational Mech. Anal., **153** (2000), 221–259.
- [60] C.Q. Chen, P.G. Lefloch, *Entropy and entropy-flux splittings for the isentropic Euler equations*, Chinese Annals Math., **22B** (2001), 145–158.
- [61] C.Q. Chen, P.G. Lefloch, *Existence theory for the isentropic Euler equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **166** (2003), 81–98.
- [62] C.Z. Cheng, G. Knorr, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*, J. Comput. Phys., **22** (1976), 330–351.

- [63] Y. Choquet-Bruhat, *Problème de Cauchy pour le système intégro-différentiel d'Einstein-Liouville*, Ann. Inst. Fourier, **21** (1971), 181–201.
- [64] M.W. Choptuik, *Universality and scaling in gravitational collapse of a scalar field*, Phys. Rev. Lett., **70** (1993), 9–12.
- [65] M.W. Choptuik, T. Chmaj, P. Bizón, *Critical behaviour in gravitational collapse of a Yang-Mills field*, Phys. Rev. Lett., **77** (1996), 424–427.
- [66] M.W. Choptuik, I. Obarrieta, *Critical phenomena at the threshold of black hole formation for collisionless matter in spherical symmetry*, Phys. Rev. D Vol., **65** (2001), 024007.
- [67] B. Cockburn, S.Y. Lin and C.-W. Shu, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III : One-dimensional systems*, J. Comput. Phys., **84** (1989), 90–113.
- [68] B. Cockburn and C.-W. Shu, *Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problem*, Journal of Scientific Computing, **16** (2001), 173–261.
- [69] B. Cockburn, *Discontinuous Galerkin methods for convection dominated problems*, in High-order methods for computational physics, in Lect. Notes Comput. Sci. Eng., **9**, Springer, Berlin, (1999), 69–224.
- [70] B. Cockburn, F. Li, C.-W. Shu, *Locally divergence-free discontinuous Galerkin-methods for the Maxwell equations*, J. of Comput. Phys., **194** (2004), 588–610.
- [71] A. Cohen, “Numerical analysis of wavelet methods”, studies in mathematics and its applications, **32**, North-Holland, Elsevier, 2003.
- [72] A. Cohen, S.M. Kaber, S. Mueller, M. Postel, *Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws*, Math. Comp., **72** (2003), 183–225.
- [73] A. Cohen, I. Daubechies, J.C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 485–560.
- [74] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes Lipschitziennes*, Ann. of Math., **116** (1982), 361–387.
- [75] R. R. Coifman, G. David, Y. Meyer, *La solution des conjectures de Calderón*, Adv. Math., **48** (1983), 144–148.
- [76] R. R. Coifman, Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, **57**, S.M.F. (1978).
- [77] W. Dai, P. R. Woodward, *On the divergence-free condition and conservation laws in numerical simulations for supersonic magnetohydrodynamic flow*, Astrophys. J., **494** (1998), 317.
- [78] G. David, *Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **17** (1984), 157–189.
- [79] G. David, *L'intégrale de Cauchy sur les courbes rectifiable*, prépublication Univ. Paris-Sud, Dept. Math., 82T05, (1982).
- [80] G. David, J.-L. Journé, *A boundness criteriom for generalied Calderón-Zygmund operators*, Ann. of Math., **120** (1984), 371–397.
- [81] I. Daubechies, “Ten lectures on wavelets”, Series in Appl. Math., vol 61, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992
- [82] A. Dedner, F. Kemm, D. Kröner, C.-D. Munz, T. Schnitzer, M. Wesenberg, *Hyperbolic Divergence cleaning for the MHD equations*, J. Comput. Phys., **175** (2002), 645–673.
- [83] P. Degond, P.-A. Raviart, *An analysis of Darwin model of approximation to Maxwell's equations*, Forum. Math, **4** (1992), 13–44.
- [84] D. Del Sarto, A. Ghizzo, T. Réveillé, N. Besse, P. Bertrand, *Application of a semi-Lagrangian scheme in the relativistic regime of laser interaction with an overdense plasma slab*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008), 59–64.
- [85] D.C. DePackh, *The Water-bag Model of a Sheet Electron Beam*, J. Electron. Control, **13** (1962), 417–424.

- [86] G. Depret, X. Garbet, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Trapped-ion driven turbulence in tokamak plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion, **42** (2000), 949–971.
- [87] D. Deslauriers, D. Dubuc, *Dyadic interpolation*, in Fractals, dimensions non entières et applications, 44–55, Masson, Paris, 1987.
- [88] D. Deslauriers, D. Dubuc, *Symmetric iterative interpolation processes*, Constr. Approx., **5** (1989), 49–68.
- [89] R.L. Dewar and J. Lindl, *Nonlinear frequency shift of a plasma wave*, Phys. Fluids, **15** (1972), 820–824.
- [90] P.H. Diamond, S.-I. Itoh, K. Itoh, and T.S. Hahm, *Zonal flows in plasma - a review* Plasma Phys. Control. Fusion, **47** (2005), R35–R161.
- [91] P.H. Diamond, C.J. McDevitt, Ö.D. Gürçan, T.S. Hahm et V. Naulin, *Transport of parallel momentum by collisionless drift wave turbulence* Phys. Plasmas, **15** (2008), 012303.
- [92] A.M. Dimits et al., *Comparisons and physics basis of tokamak transport models and turbulence simulations*, Phys. Plasmas, **7** (2003), 969–983.
- [93] R.J. Diperna, P.-L. Lions and Y. Meyer, *L^p regularity of velocity averages*, Ann. I.H.P. analyse non linéaire, **8** (1991), 271–287.
- [94] W. Dorland, F. Jenko, M. Kotschenreuther, B.N. Rogers, *Electron temperature gradient turbulence*, Phys. Rev. Lett., **85** (2000), 5579–5582.
- [95] W. Dorland and G.W. Hammett, *Gyrofluid turbulence models with kinetic effects*, Phys. Fluids B, **5** (1993), 812–835.
- [96] N.A. Douglas, F. Brezzi, B. Cockburn and D. Marini, *Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems*, SIAM, J. Numer. Anal., **39** (2002), 1749–1779.
- [97] D. H. E. Dubin, J. A. Krommes, C. Oberman, W. W. Lee, *Nonlinear gyrokinetic equations*, Phys. Fluids, **25** (1983), 3524–3535.
- [98] W. E. Drummond and P. Pines *Nonlinear stability of plasma oscillations* Nucl. Fusion, **SUP3** 1962, 1049.
- [99] T. H. Dupree *A Perturbation Theory for Strong Plasma Turbulence* Phys. Fluids, **9** 1966, 1773.
- [100] N. Dyn, J.A. Gregory, D. Levin, *A four point interpolatory subdivision scheme for curves design*, Computer Aided Geometric Design, **4** (1987), 257–268.
- [101] E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall and A. Ting, *Overview of plasma-based accelerator concepts*, IEEE trans. Plasma Sci., **24** (1996), 252–288.
- [102] C. R. Evans, J. F. Hawley, *Simulation of magnetohydrodynamic flows, a constrained transport method*, Astrophys. J., **332** (1988), 659.
- [103] M. Falcone, R. Ferretti, *Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes*, SIAM, J. Numer. Anal., **61** (1998), 435–448.
- [104] M.R. Feix, F. Hohl and L.D. Staton, *Nonlinear effects in Plasmas*, in “Plasmas”, (eds. G. Kalman and M.R. Feix), Gordon and Breach (1969), 3–21.
- [105] U. Finzi, *Accessibility of exact nonlinear states in water-bag model computer experiments*, Plasma Phys., **14** (1972), 327–338.
- [106] D.W. Forslund, J.M. Kindel and E.L. Lindman, *Theory of stimulated scattering processes in laser-irradiated plasmas*, Phys. Fluids, **18** (1975), 1002–1017.
- [107] K. O. Friedrichs, *Symmetric positive linear differential equations*, Comm. on pure and appl. math., **11** (1958), 333–418.
- [108] E. A. Frieman, L. Chen, *Nonlinear gyrokinetic equations for low-frequency electromagnetic waves in general plasma equilibria*, Phys. Fluids, **25** (1982), 502–508.
- [109] F.D. Gakhov, “Boundary value problems”, Pergamon Press, Oxford (1966).
- [110] K. Ganguly, H. Victory, *On the convergence for particle methods for multidimensional Vlasov-Poisson systems*, SIAM J. Numer. Anal., **26** (1989), 249–288.

- [111] X. Garbet and R.E. Waltz, *Action at distance an bohm scaling of turbulence in tokamaks*, Phys. Plasmas, **3** (1996), 1898–1907.
- [112] X. Garbet, Y. Sarazin, P. Ghendrih, S. Benkadda, P. Beyer, C. Figarella et I. Voitsekhovitch *Turbulence simulations of transport barriers with toroidal velocity* Phys. Plasmas, **9** 2002, 3893.
- [113] X. Garbet, Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, G. Darmet, Ph. Gendrih, P. Angelino, P. Bertrand, N. Besse, E. Gravier, P. Morel, E. Sonnendrücker, N. Crouseilles, J-M. Dischler, G. Latu, E. Violard, M. Brunetti, S. Brunner, X. Lapillonne, T.-M. Tran, L. Villard, M. Boulet, *Beyond scale separation in gyrokinetic turbulence*, Nucl. Fusion, **47** (2007), 1206–1212.
- [114] V.V. Geogjaev, *On continuous Benney equations*, Physica D, **87** (1995), 168–175.
- [115] A. Ghizzo, D. DelSarto, T. Réveillé, N. Besse and R. Klein, *Self-induced transparency scenario revisited via beat-wave heating induced by Doppler shift in overdense plasma layer*, Phys. Plasmas, **14** (2007), 062702.
- [116] A. Ghizzo, T.W. Johnston, T. Réveillé, P. Bertrand and M. Albrecht-Marc, *Stimulated-Raman-scatter behavior in a relativistically hot plasma slab and an electromagnetic low-order pseudocavity* , Phys. Rev. E, **74** (2006), 046407.
- [117] A. Ghizzo, D. Del Sarto, T. Réveillé, N. Besse, R. Klein, *Self-transparency scenario revisited via the beating of the pump wave and its reflected wave in one dimensional moderately overdense plasma layer*, Phys. Plasmas,**14** (2007), 062702.
- [118] J. Gibbons, *Collisionless Boltzmann equations and integrable moment equations*, Physica **3D** (1981), 503–511.
- [119] V. Gilrault, P.-A. Raviart, “ Finite element methods for the Navier-Stokes equations, Theory and algorithms”, Springer Series in Comput. Math. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [120] R. T. Glassey, “The Cauchy problem in kinetic theory”, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [121] R.T. Glassey, J. Schaeffer, *Convergence of a particle method for the relativistic Vlasov-Maxwell system*, SIAM J. Numer. Anal., **28** (1991), 1–25.
- [122] Y. Giga and T. Miyakawa, *A kinetic construction of global solutions of first order quasilinear equations*, Duke Math. J., **50** (1983), 505–515.
- [123] I. Gohberg and N. Krupnik, “One dimensional linear singular integral equations”, Vol. I, OT53, Operator Theory : Advances and Applications, Birkhäuser (1992).
- [124] I. Gohberg and N. Krupnik, “One dimensional linear singular integral equations”, Vol. II, OT54, Operator Theory : Advances and Applications, Birkhäuser (1992).
- [125] F. Golse, B. Perthame and R. Sentis, *Un résultat de compacité pour les équations de transport et application au calcul de la limite de la limite de la valeur propre principale d’un opérateur de transport*, C. R. Acad. Sc., Série I, **301** (1985), 341–344.
- [126] F. Golse, P.-L. Lions, B.Perthame and R. Sentis, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal., **76** (1988), 110–125.
- [127] S. Gottlieb, C.-W. Shu and E. Tadmor, *Strong stability-preserving high-order time discretization methods*, SIAM review, **43** (2001), 89–112.
- [128] L. Gosse, *Using K-Branch entropy solutions for multivalued geometric optics computations*, J. Comput. Phys., **180** (2002), 155–182.
- [129] L. Gosse, S. Jin and X. Li, *Two moment systems for computing multiphase semiclassical limits of the Schrödinger equation*, Math. Models Meth. Applied Sci., **13** (2003), 1689–1723.
- [130] L. Gosse and P. A. Markowich, *Multiphase semiclassical approximation of an electron in a one-dimensional crystalline lattice I. Homogeneous problems*, J. Comput. Phys., **197** (2004), 387–417.

- [131] V. Grandgirard, M. Brunetti, P. Bertrand, N. Besse, X. Garbet, P. Ghendrih, G. Manfredi, Y. Sarazin, O. Sauter, E. Sonnendrücker, J. Vaclavik and L. Villard, *A drift-kinetic semi-Lagrangian 4D code for ion turbulence simulation*, J. Compt. Phys., **217** (2006), 395–423.
- [132] V. Grandgirard, Y. Sarazin, X. Garbet, G. Dif-Pradalier, Ph. Ghendrih, N. Crouseilles, G. Latu, E. Sonnendrücker, N. Besse and P. Bertrand, *Computing ITG turbulence with a full-f semi-Lagrangian code*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008), 81–87.
- [133] V. Grandgirard, N. Besse, E. Sonnendrücker, *Amélioration des schémas numériques semi-Lagrangiens associés à la résolution des équations de Vlasov non-linéaires 4D pour l'étude de la turbulence plasma*, Rapport CEA, CEA/CADARACHE/DRFC/SIPP/GTHM, PHY/NTT-2003.013, 2003.
- [134] E. Gravier, R. Klein, P. Morel, N. Besse, P. Bertrand, *Gyrokinetic-water-bag modeling of low-frequency instabilities in a laboratory magnetized plasma column*, Phys. Plasmas, **15** (2008), 122103.
- [135] M. Gros, P. Bertrand and M.R. Feix, *connexion between, hydrodynamic, water bag and Vlasov models*, Plasma Phys., **20** (1978), 1075–1080.
- [136] S. Guérin, P. Mora, J.C. Adam, A. Héron, G. Laval, *Propagation of ultra-intense laser pulses through overdense plasma layers*, Phys. Plasmas, **3** (1996), 2693–2701.
- [137] C. Gundlach, *Critical phenomena in gravitational collapse*, Living Rev. Relativity, **2** (1999).
- [138] C. Gundlach, *Critical phenomena in gravitational collapse*, Adv. Theor. Math. Phys., **2** (1998), 1–49.
- [139] M. Griebel, F. Koster, *Adaptive wavelet solver for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, J. Maleck and J. Necas and M. Rokyta eds., Springer Verlag, (2000).
- [140] T. S. Hahm, *Nonlinear gyrokinetic equations for tokamak microturbulence*, Phys. Fluids, **31** (1988), 2670–2673.
- [141] F. R. Hansen, G. Knorr, J. P. Lynov, H. L. Pécseli, J. J. Rasmussen, *A numerical plasma simulation including finite Larmor radius effects to arbitrary order*, Plasma Phys. Control. Fusion **31** (1989), 173.
- [142] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, “Plasma confinement”, Dover publications, 2003.
- [143] J.P. Holloway and J. Dornring, *Undamped plasma waves*, Phys. Rev. A, **44** (1991), 3856–3868.
- [144] F. Huot, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, O. Coulaud, *Study of propagation of ultraintense electromagnetic wave through plasma using semi-Lagrangian Vlasov codes*, IEEE Transactions on plasma science, **28** (2000), 1209–1223.
- [145] F. Huot, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, O. Coulaud, *Instability of the time splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov-Maxwell system*, J. Comput. Phys., **185** (2003) 512–531.
- [146] Y. Idomura, S. Tokuda, Y. Kishimoto, *Global gyrokinetic simulation of ion temperature gradient driven turbulence in plasmas using a canonical Maxwellian distribution*, Nucl. Fusion, **43** (2003), 234–243.
- [147] Y. Idomura, M. Wakatani, S. Tokuda, *Stability of $E \times B$ zonal flow in electron temperature gradient driven turbulence*, Phys. Plasmas, **7** (2000), 3551–3556.
- [148] S. Jin and X. Li, *Multi-phase computations of the semiclassical limit of the Schrödinger equation and related problems : Whitham vs Wigner*, Physica D, **182** (2003), 46–85.
- [149] C. Josh, C.E. Clayton, W.B. Mori, J.M. Dawson, T. Katsouleas, *The prospects for a GeV plasma beat wave accelerator*, Plasma Phys. Controlled Fusion, **16** (1994) 65–77.
- [150] J.-L. Journé, “Caldéron-Zygmund operators, pseudodifferential operators and the Cauchy integral of Caldéron”, Lecture Notes in Mathematics, **994**, Berlin, (1983).

- [151] O. A. Karakashian, W. N. Jureidini, *A nonconforming finite element method for the stationary Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal., **35** (1998), 93–120.
- [152] G.E. Karniadakis and S.J. Sherwin, “Spectral/hp element methods in CFD”, Oxford University Press, 1999.
- [153] E. F. Keller and L. A. Segel, *Traveling band of chemotactic bacteria; A theoretical analysis*, J. Theor. Biol., **26** (1970), 399.
- [154] R. Klein, E. Gravier, P. Morel, N. Besse, P. Bertrand, *Gyrokinetic water-bag modeling of a plasma column : magnetic moment distribution and finite Larmor radius effects*, Phys. Plasmas **16** (2009), 082106.
- [155] G. Knorr, H. L. Pécseli, *Asymptotic state of the finite-Larmor-radius guiding-center plasma*, J. Plasma Phys., **41** (1989), 157.
- [156] B.A. Kupershmidt, Y.I. Manin, *Long wave equations with free boundaries. I. conservation laws and solution*, Funct. Anal. Appl., **11** (1978), 188–197.
- [157] B.A. Kupershmidt, Y.I. Manin, *Equations of long waves with a free surface. II. Hamiltonian structure and higher equations*, Funct. Anal. Appl., **12** (1978), 20–29.
- [158] C. Lancellotti and J.J. Dorning, *time-asymptotic traveling-wave solutions to the nonlinear Vlasov-Poisson-Ampère equations*, J. Math. Phys., **40** (1999), 3895–3917.
- [159] C. Lancellotti and J.J. Dorning, *time-asymptotic wave propagation in collisionless plasmas*, Phys. Rev. E, **68** (2003), 026406.
- [160] D.R. Lebedev, Y.I. Manin, *Conservation laws and Lax representation of Benney’s long wave equations*, Phys. Lett., **74A** (1979), 154–156.
- [161] W. W. Lee, *Gyrokinetic approach in particle simulation*, Phys. Fluids, **26** (1983), 556–562.
- [162] F. Li, C.-W. Shu, *Locally divergence-free discontinuous Galerkin methods for MHD equations*, SIAM J. Sci. Comput., **27** (2005), 413–442.
- [163] P.-L. Lions, B. Perthame and E. Tadmor, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations*, J. Amer. Math. Soc., **7** (1994), 169–191.
- [164] P.-L. Lions, B. Perthame and E. Tadmor, *kinetic formulation of Isentropic gas dynamics and p-systems*, Commun. Math. Phys., **163** (1994), 415–431.
- [165] Z. Lin, T.S. Hahm, W.W. Lee, W.M. Tang, R.B. White, *Gyrokinetic simulations in general geometry and applications to collisional damping of zonal flows*, Phys. Plasmas, **7** (2000), 1857–1862.
- [166] G. Manfredi and M. Ottaviani, *Gyro-Bohm scaling of ion thermal transport from global numerical simulations of ion-temperature-gradient-driven turbulence*, Phys. Rev. Lett., **79** (1997), 4190–4193.
- [167] N. Masmoudi, N.J. Mauser, *The selfconsistent Pauli Equation*, Monatshefte f. Math., **132** (2001), 19–24.
- [168] M.S. Melnikov, J.A. Verdera, *A geometric proof of the L^2 boundedness of the Cauchy integral on Lipschitz graphs*, International Math. Research Notices, **7** (1995), 325–331.
- [169] Y. Meyer, R. Coifman, “Wavelets, Calderón-Zygmund and multilinear operators”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 48, Cambridge University Press, (1997).
- [170] S.G Mikhlin and S. Prössdorf, “Singular integral operators”, Springer (1986).
- [171] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, A. Ghizzo and P. Bertrand, *The water bag and gyrokinetic applications*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **13** (2008), 11–17.
- [172] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, A. Ghizzo, P. Bertrand, X. Garbet, P. Ghendrih, V. Grandgirard and Y. Sarazin, *Gyro kinetic modelling : A multi-water-bag approach*, Physics of Plasmas, **14** (2007), 112109.
- [173] P. Morel, E. Gravier, N. Besse, R. Klein, P. Bertrand, *Gyrokinetic water-bag modeling of a plasma column : impurities effects*, soumis.

- [174] T. Murai, *Boundedness of singular integral operators of Calderón type*, Proc. Japan Acad., **59** (A) 8 (1983), 364–367.
- [175] T. Murai, *Boundedness of singular integral operators of Calderón type (V and VI)*, Nagoya University preprint series, (1984).
- [176] T. Murai, “A real variable method for the Cauchy transform and analytic capacity”, Lectures Notes in Math., **1307**, Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- [177] N. I. Muskhelishvili, “Singular integral equations”, Akademie-Verlag, Berlin (1965).
- [178] T. Nakamura and T. Yabe, *The cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov-Poisson equation in phase space*, Comput. Phys. Commun., **120** (1999), 122–154.
- [179] M. Navet and P. Bertrand, *Multiple "water-bag" and Landau damping*, Phys. Lett., **34A** (1971), 117–118.
- [180] H. Nordman, J. Weiland, A. Jarmén, *Simulation of toroidal drift mode turbulence driven by temperature gradients and electron trapping*, Nucl. Fusion, **30** (1990), 983.
- [181] J. C. Nédélec, *Mixed finite element in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., **35** (1980), 315–341.
- [182] S.E. Parker, W.W. Lee and R.A. Santoro, *Gyrokinetic simulation of ion temperature gradient driven turbulence in 3D toroidal geometry*, Phys. Rev. Lett., **71** (1993), 2042.
- [183] F.W. Perkins, D.L. Jassby, *Velocity shear and low-frequency plasma instabilities*, Phys. Fluids, **14** (1971), 234–243.
- [184] B. Perthame and E. Tadmor, *A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws*, Commun. Math. Phys., **136** (1991), 501–517.
- [185] W. Pogorzelski, “Integral equations and their applications”, Pergamon Press (1966).
- [186] K. G. Powell, *An approximate Riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension)*, ICASE-Report 94-24 (NASA CR-194902) (NASA Langley Research Center, Hampton, VA 23681-0001, 8 april 1994).
- [187] P.-A. Raviart, J. M. Thomas, *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, In A. Dold, B. Eckmann (eds). Mathematical aspects of finite elements methods. Proceedings of the conference held in Rome, 10-12 Dec, 1975. Springer, Berlin Heidelberg New York (Lectures Notes in Mathematics vol 606)
- [188] P.-A. Raviart, E. Sonnendrücker, *A Hierarchy of Approximate Models for the Maxwell Equations*, Numer. Math., **73** (1996), 329–372.
- [189] G. Rein, A.D. Rendall, *Global existence of solutions of the spherically symmetric Vlasov-Einstein with small initial data*, Commun. Math. Phys., **150** (1992), 561–583. *Eraatum* : Comm. Math. Phys., **176** (1996), 475–478.
- [190] G. Rein, A.D. Rendall, *Compact support of spherically symmetric equilibria in non-relativistic and relativistic galactic dynamics*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **128** (2000), 363–380.
- [191] G. Rein, A.D. Rendall, J. Schaeffer, *Critical collapse of collisionless matter—a numerical investigation*, Physical Reviews D, **58** (1998), 044007.
- [192] G. Rein, A.D. Rendall, J. Schaeffer, *A regularity theorem for solutions of the spherical symmetric Vlasov-Einstein system*, Commun. Math. Phys., **168** (1995), 467–478.
- [193] G. Rein, T. Rodewis, *Convergence of a Particle-In-Cell scheme for the spherically symmetric Vlasov-Einstein system*, Ind. Un. Math. J., **52** (2003), 821–861.
- [194] R. Z. Sagdeev and A. Galeev, “Nonlinear plasma theory”, Benjamin, N.Y. (1969).
- [195] Y. Sarazin, V. Grandgirard, E. Fleurence, X. Garbet, Ph. Ghendrih, P. Bertrand and G. Depret, *Kinetic features of interchange turbulence*, Plasma Physics and Controlled Fusion, **47** (2005), 1817–1839.
- [196] Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, X. Garbet, Ph. Ghendrih, *Interplay between transport barriers and density gradient*, Phys. Plasmas, **13** (2006), 092307.

- [197] Y. Sarazin, V. Grandgirard, G. Dif-Pradalier, E. Fleurence, X. Garbet, Ph. Gendrih, P. Bertrand, N. Besse, N. Crouseilles, E. Sonnendrücker, G. Latu, E. Violard, *Impact of large scale flows on turbulent transport*, Plasma Phys. Control. Fusion, **48** (2006), B179–B188.
- [198] J. Schaeffer, *Discrete approximation of the Poisson-Vlasov system*, Quart. Appl. Math., **45** (1987), 59–73.
- [199] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Relativistic stellar dynamics on computer I, motivation and numerical methods*, Astrophys. J., **298** (1985), 34–57.
- [200] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Relativistic stellar dynamics on computer II, Physical applications*, Astrophys. J., **298** (1985), 58–79.
- [201] S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, *Relativistic stellar dynamics on computer IV, Collapse of a stellar cluster to a black hole*, Astrophys. J., **307** (1986), 575–592.
- [202] M. Shoucri, P. Bertrand, M.R. Feix and B. Izrar, *Numerical study of strong non-linear effects in a water bag plasma*, report of Tokamak de Varennes, hydro-Québec, No TV RI 213e, 1986.
- [203] L.O. Silva, M. Marti, J.R. Davies, R.A. Fonseca, C. Ren, F.S. Tsung, W.B. Mori, *Proton shock acceleration in laser-plasma interactions*, Phys. Rev. Lett., **92** (2004), 015002.
- [204] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, A. Ghizzo, *The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys., **149** (1999), 201–220.
- [205] A. Staniforth, J. Cote, *Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review*, Monthly Weather Review, **119** (1991), 2206–2223.
- [206] E.M. Stein, “Harmonic analysis : Real-variable methods, orthogonality, and Oscillatory integrals”, Princeton university Press (1993).
- [207] R.D. Sydora, V.K. Decyk and J.M. Dawson, *Fluctuation-induced heat transport results from a large global 3D toroidal particle simulation model*, Plasma Phys. Control. Fusion, **38** (1996), A281–A294.
- [208] M.E. Taylor “Partial differential equation III, nonlinear equations”, Springer Series Appl. Math. Sci., 117, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [209] M.E. Taylor, “Pseudo-differential operators and nonlinear PDE”, Progress in Mathematics, 100, Birkhäuser, 1991.
- [210] V.M. Teshukov, *On hyperbolicity of long-wave equations*, Soviet Math. Dokl., **32** (1985), 469–473.
- [211] G. Tóth, *The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes*, J. Comput. Phys., **161** (2000), 605.
- [212] N.G. Van Kampen, *On the theory of stationary waves in plasmas* Physica, **21** (1955), 949–963.
- [213] A. Vasseur, *Kinetic semidiscretization of scalar conservation laws and convergence by using averaging lemmas*, SIAM J. Numer. Anal., **36** (1999), 465–474.
- [214] A. Vasseur, *Convergence of a semi-discrete kinetic scheme for the system of isentropic gas dynamics with $\gamma = 3$* , Univ. Math. J., **48** (1999), 347–364.
- [215] H.D. Victory, G. Tucker, K. Ganguly, *The convergence analysis of fully discretized particle methods for solving Vlasov-Poisson systems*, SIAM J. Numer. Anal., **28** (1991), 955–989.
- [216] H.D. Victory, E.J. Allen, *The convergence theory of particle-in-cell methods for multi-dimensional Vlasov-Poisson systems*, SIAM J. Numer. Anal., **28** (1991), 1207–1241.
- [217] R.E. Waltz, *Three-dimensional global numerical simulation of ion temperature gradient mode turbulence*, Phys. Fluids, **31** (1988), 1962–1967.
- [218] S. Weber, C. Riconda, V.T. Tikhonchuk, *Strong kinetic effects in cavity-induced low-level saturation of stimulated Brillouin backscattering for high-intensity laser-plasma interaction*, Phys. Plasmas, **12** (2005), 43101.

-
- [219] V.E. Zakharov, *Benney equations and quasiclassical approximation in the method of the inverse problem*, *Funct. Anal. Appl.*, **14** (1980), 89–98.
- [220] V.E. Zakharov, *On the Benney equations*, *Physica* **3D** (1981), 193–202.