

# Large-scale modes and instabilities in astrophysical disks

Michel Tagger

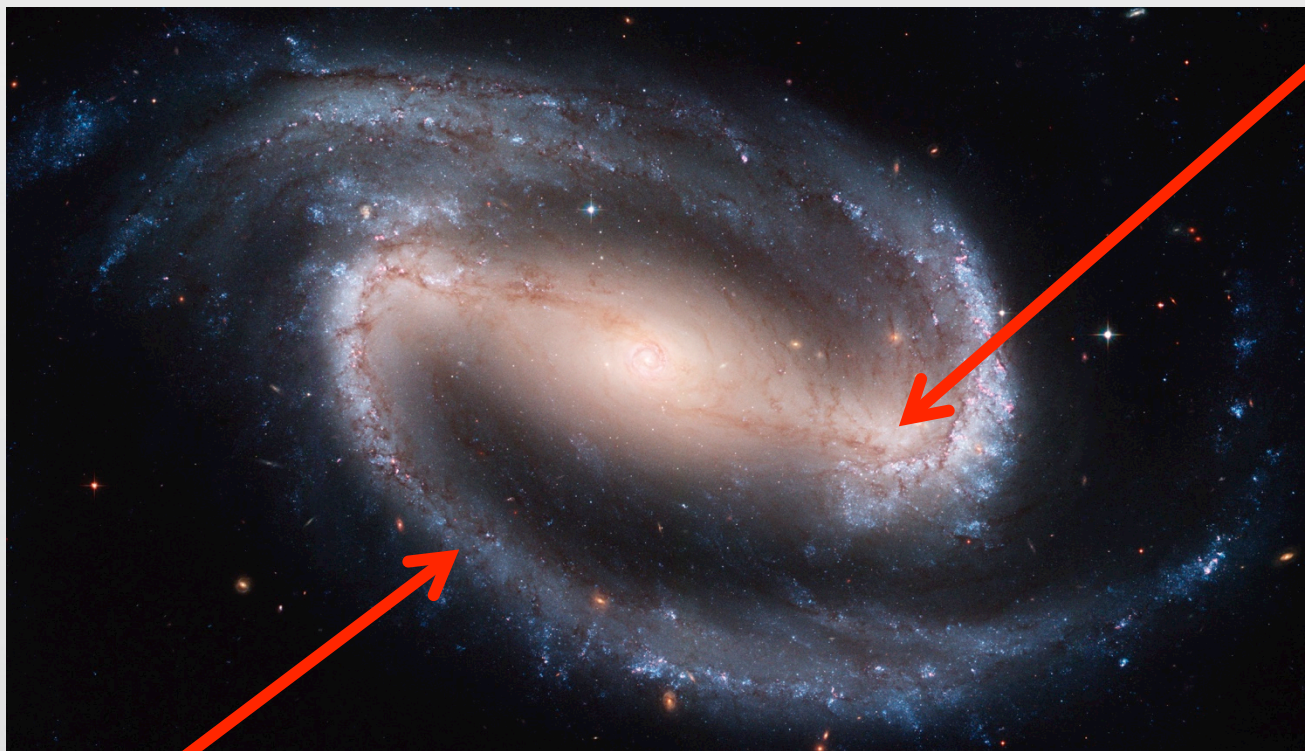
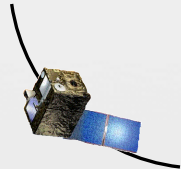
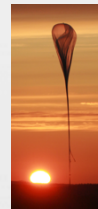
(+ R. Pellat, F. Masset, P. Varnière, S. Caunt,  
R. Belmont, H. Méheut...)



*Laboratoire de Physique et Chimie  
de l'Environnement et de l'Espace*

---

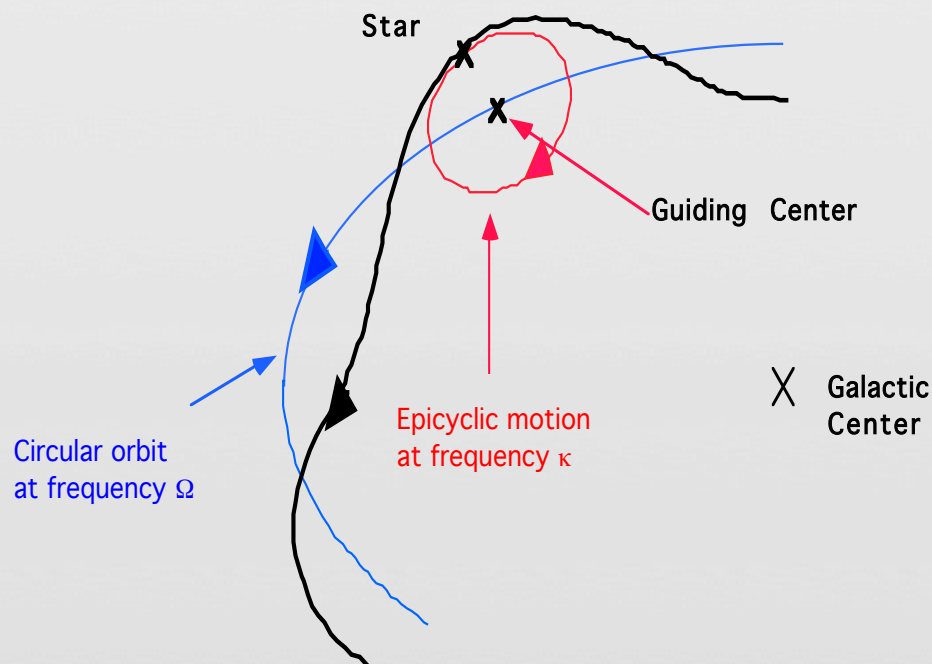
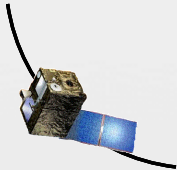
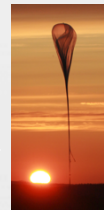
# la physique est belle... et universelle



la barre est une  
population  
d'étoiles  
(« particules »)  
piégées dans une  
résonance  
épicyclique  
( $\sim$  cyclotronique)

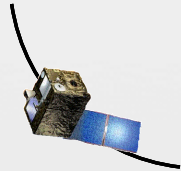
la structure spirale est une onde de type  
sonore ( $\sim$  onde de Bernstein)

**et** une instabilité d'accrétion à grande échelle



- equivalent to **Cyclotron motion** in plasmas
- A Guiding Center in circular motion at frequency  $\Omega$
- + a retrograde ellipse at frequency  $\kappa$
- $\kappa^2 = 4\Omega^2 + 2\Omega\Omega'r$

central potential  $\Rightarrow \Phi \sim r^{-1} \Rightarrow \kappa = \Omega \Rightarrow$  closed orbit (Kepler's ellipse !).  
 $\kappa^2 \Leftrightarrow$  restoring force, frequency of radial motion



- Spiral density wave = **sound wave**  
modified by differential rotation, epicyclic motion, self-gravity, Lorentz force...
- WKB dispersion relation (gas disk but ~ also in stellar disk):

$$(\omega - m\Omega(r))^2 = \kappa^2 - (2\pi G \Sigma - \underline{B}^2) |k| + k^2 c_s^2$$

pressure  
(sound)

Doppler,  
differential rotation  
(depends on  $r$ )

Epicyclic

Self-Gravity

Magnetic stresses  
(if vertical field)

modulus of  $k$   
=> 3D effects

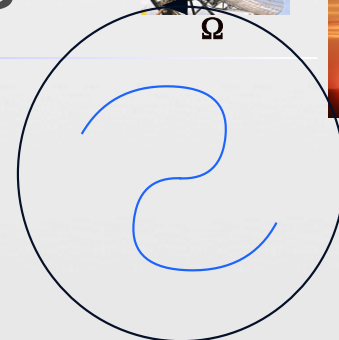
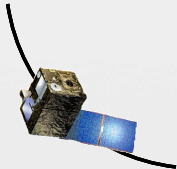
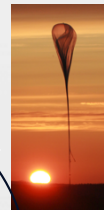
$kr/m$  = winding  
of the spiral

$\Sigma$  = surface  
density

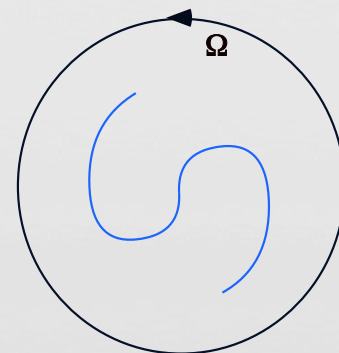
$m$  = azimuthal wavenumber  
(= number of arms of the spiral)

# propagation des ondes spirales

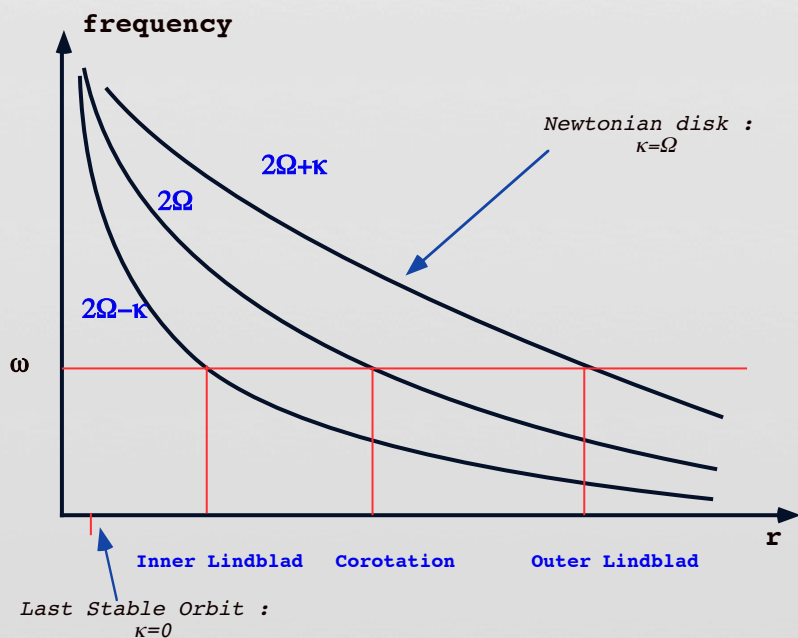
- dispersion relation **even in  $k$**  => both windings are permitted !
- => Excitation or amplification select the « intuitive » winding (trailing)
- rotation curves => **Corotation** :  $\omega - m\Omega(r)=0$  and **Linblad resonances** :  $\omega - m\Omega = \pm \kappa$



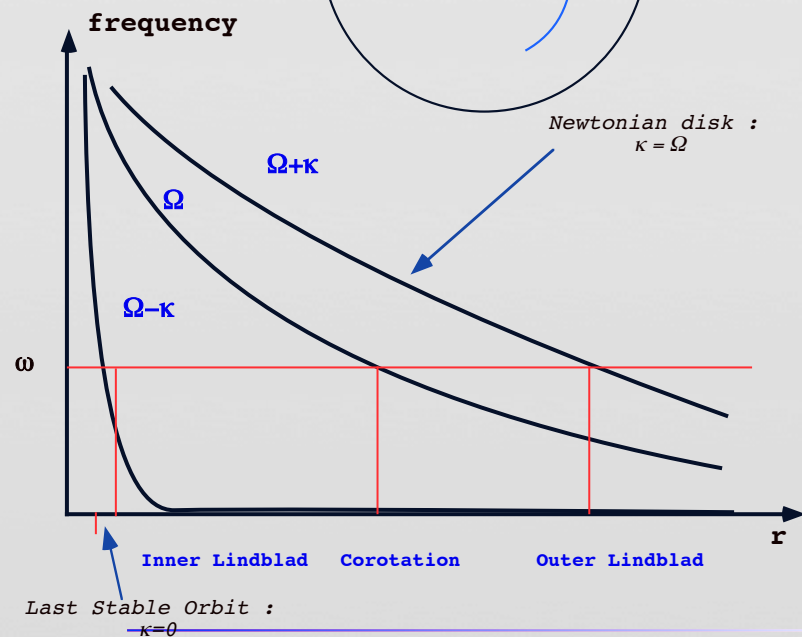
Leading



Trailing

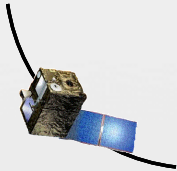
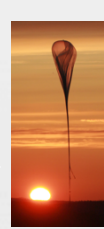


**m=2**



**m=1 : no ILR in newtonian disk**





$$(\omega - m\Omega)^2 = \kappa^2 + B^2|k|/\Sigma + k^2 c_s^2$$

Minimal value for  $|\omega - m\Omega| \Rightarrow$

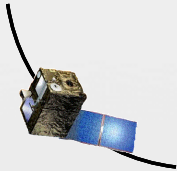
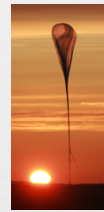
- no propagation near corotation ( ~ forbidden band)
- waves propagating radially, beyond Lindblad resonances
- wave reflection at Lindblad resonances

inside corotation ( $\omega - m\Omega < 0$ ) the waves have

**negative energy and angular momentum**

(liberation of potential energy  $\rightarrow$  the wave decreases the total energy)

**Positive energy beyond corotation**



De manière (assez) générale :

Une onde qui tourne moins vite que le gaz **diminue** l'énergie totale  
( -> onde d'énergie négative)

Une onde qui tourne plus vite **augmente** l'énergie totale  
(-> onde d'énergie positive)

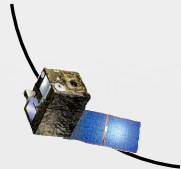
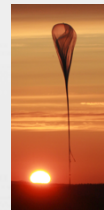
Dans un disque en rotation différentielle :

Une onde  $\sim \cos(\omega t - m\vartheta)$  a un rayon de corotation où  $\Omega(r_C) = \frac{\omega}{m}$

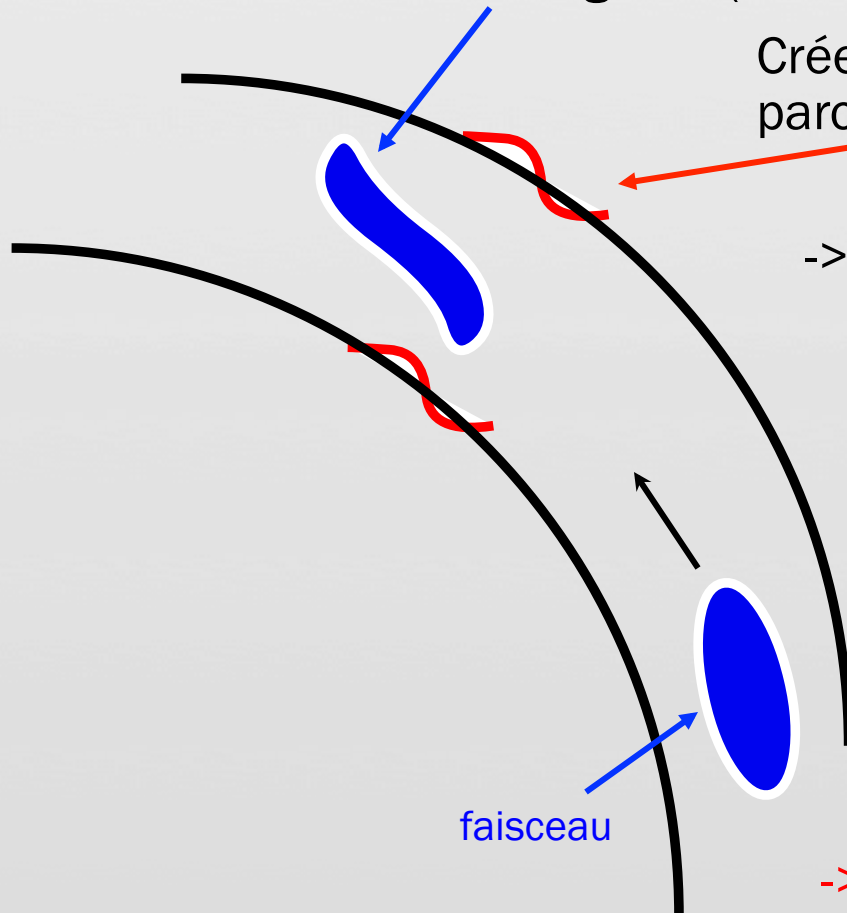
=> si  $r < r_C$   $\frac{\omega}{m} < \Omega$  -> énergie négative (tourne **moins vite** que le gaz)

si  $r > r_C$   $\frac{\omega}{m} > \Omega$  -> énergie positive (tourne **plus vite** que le gaz)

# exemple : instabilité d'énergie négative dans un accélérateur circulaire



Une perturbation du faisceau qui se propage dans le sens retrograde (donc le ralentit)



Crée des courants-image dans les parois

-> dissipation ohmique de ces courants

-> absorption d'énergie

-> ralentit encore le faisceau

-> amplifie la perturbation initiale

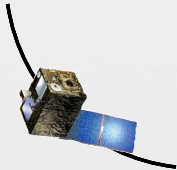
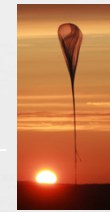
-> croissance exponentielle

**-> INSTABILITÉ D'ÉNERGIE NÉGATIVE**

**-> limite l'intensité du faisceau dans les accélérateurs**



# amplification des ondes spirales



Leading wave, energy  $-1$

Standing wave  
= Normal Mode

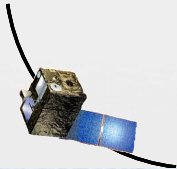
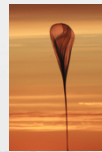
Centre

Trailing, energy  $+\epsilon$

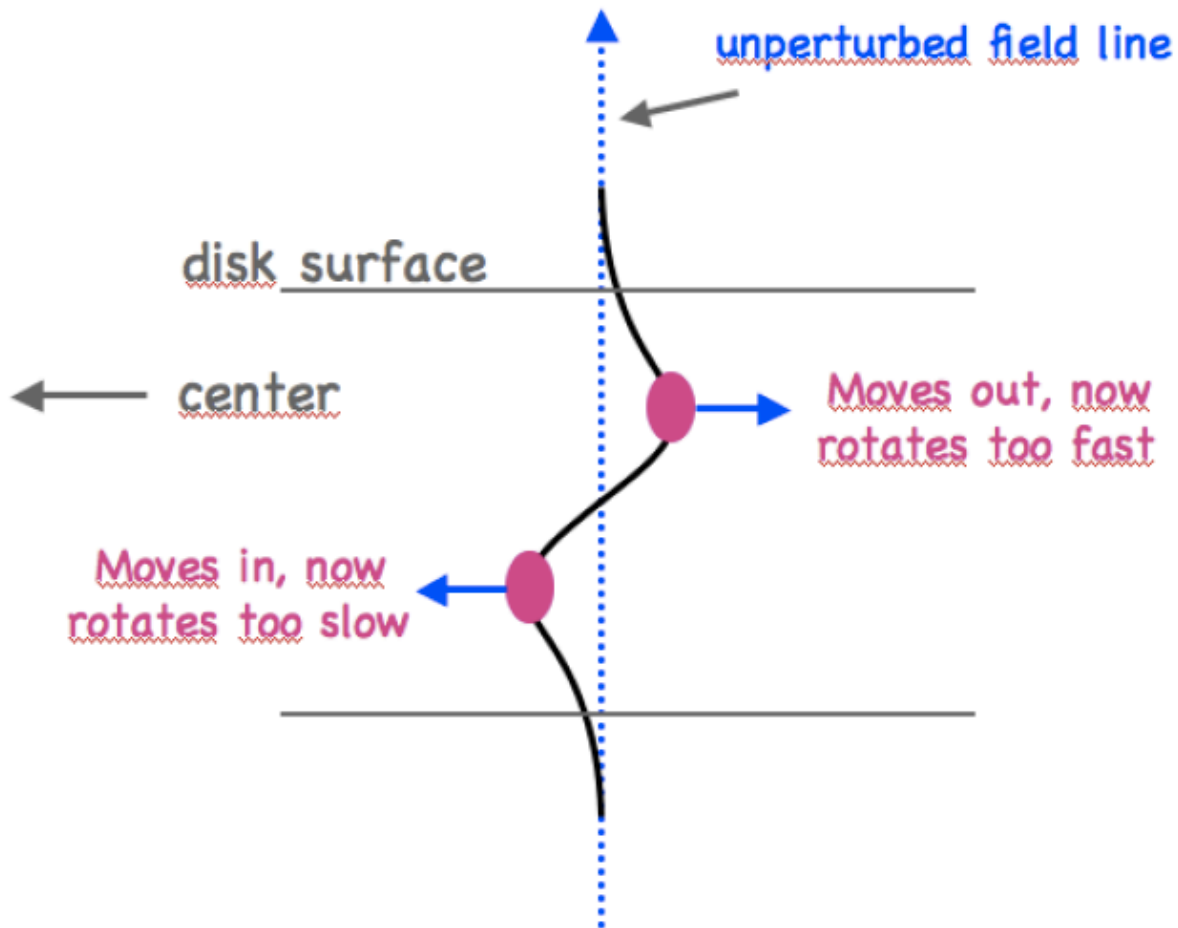
Corotation  
(forbidden band)

Trailing wave, energy  $-1-\epsilon$

- a **leading** wave, energy  $-1$  (inside corotation)
- Reflected as a **trailing** wave
- new reflection at the inner edge  $\Rightarrow$  standing wave = **normal mode**
- tunnel effect  $\Rightarrow$  **emission of an outgoing trailing wave beyond corotation**, energy  $+\epsilon$   
(radiation rather than dissipation)
- Conservation of energy  $\Rightarrow$  the reflected wave has energy  $-1-\epsilon \Rightarrow$  **Amplification**
- Self-gravity :  $\epsilon$  up to **100 !**      **Very strong instability, anomalous tunnel effect due to long-range action of gravity**
- hydro (Papaloizou-Pringle) or MHD (Tagger et al, 1990) : **very weak instability**



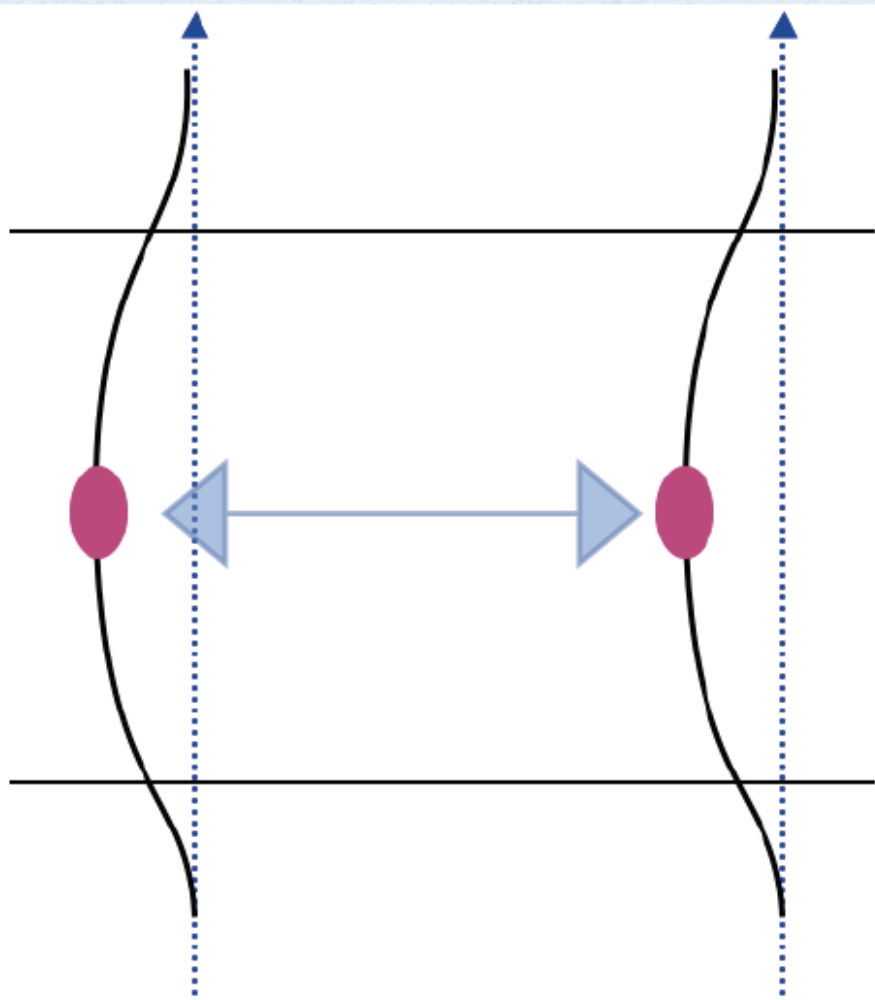
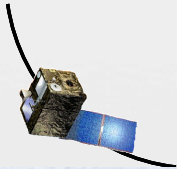
## vertical structure



**MRI:** exchanges energy and angular momentum between fluid particles along field lines

=> needs to vary across the disk thickness

$$(k_z h > 1)$$



### thin disk waves:

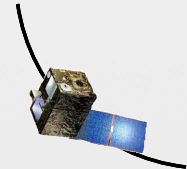
perturbations nearly constant  
across the disk thickness

$$(k_z h \ll 1)$$

energy and angular momentum  
are exchanged at differing radii  
by the action of forces:

- short-range (pressure):
  - > Papaloizou-Pringle  
(weak, short wavelength)
- long-range:
  - self-gravity -> galaxies
  - Lorentz -> AEI

# instabilité d'accrétion-éjection



- ★  $n=0$  nodes in the vertical structure (MRI :  $n \geq 1 \Leftrightarrow k_z h \sim 1$ )
- ★ Poloidal field threading the disk ( ~ Blandford - Payne, ...)
- ★ Spiral waves due to  $B$  rather than  $G$
- ★ Differential rotation in disks  $\Rightarrow$  also differential vorticity usually neglected in disk theories  $\Rightarrow$  what about Rossby waves ??

planets : differential vorticity but solid rotation

-> Analysis of Rossby waves with differential rotation

$\Rightarrow$  Coupling between Rossby and spirals

at corotation resonance: the spiral exchanges

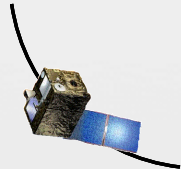
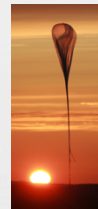
energy and momentum with a Rossby vortex

Known but not very important in self - gravity,

exponentially weak in pure hydro (Papaloizou-Pringle)

Quite efficient with  $B$  !





Circulation of the westerlies is in the form of waves

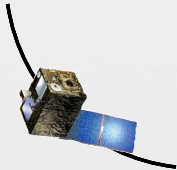
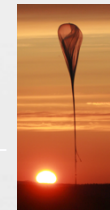
**Rossby Waves** long-period, planetary-scale waves that are the *major source of meridional transport of energy*.



**Zonal Flow:** (e.g., winter - greater temperature gradient) low amplitude waves, stronger winds, less heat and moisture transport poleward

**Meridional Flow:** high amplitude waves, greater heat and moisture transport poleward

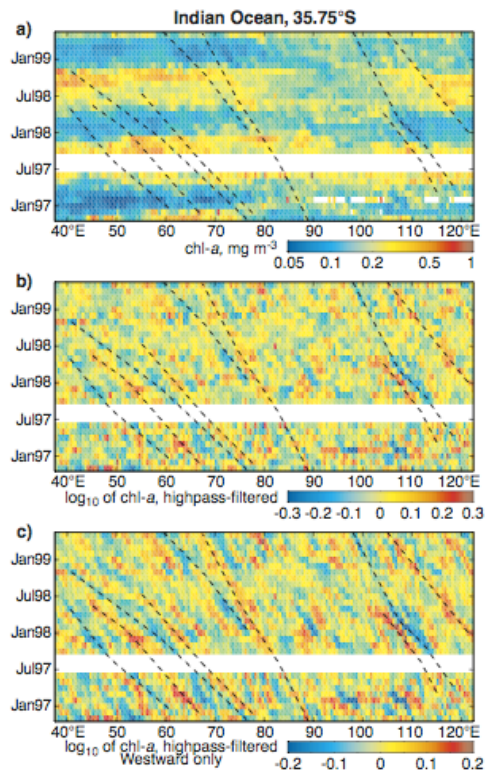




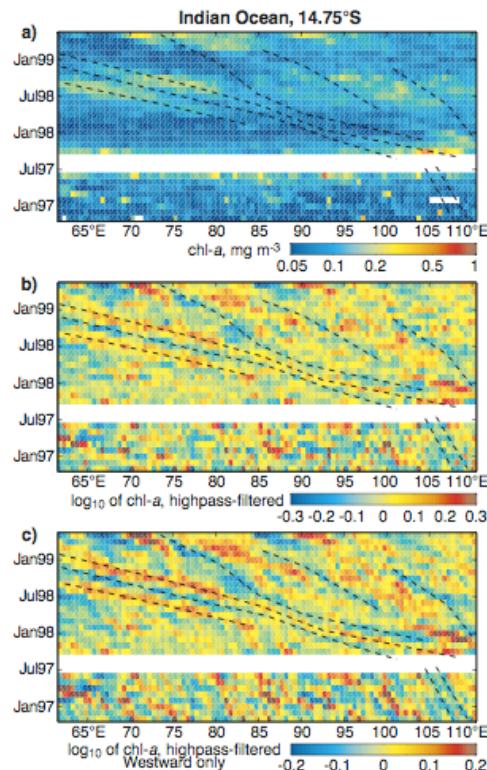
et 'ratissage' du phytoplancton (ou débris organiques)

2

CIPOLLINI ET AL.: ROSSBY WAVES IN GLOBAL OCEAN COLOUR DATA



**Figure 1.** a) Longitude-time plot of the combined OCTS and SeaWiFS monthly chlorophyll concentrations at 35.75°S in the Indian Ocean. The colorscale is logarithmic. b) same as in a), after high-pass filtering as described in the text. c) same as in b), after westward-only filtering as described in the text.



**Figure 3.** As in fig. 1, for 14.75°S in the Indian Ocean.

In figure 1 b) the presence of westward propagating alignments is much clearer than in figure 1 a) and unequivocal.

Les ondes tendent à  
'ratisser' les débris sur  
leur passage

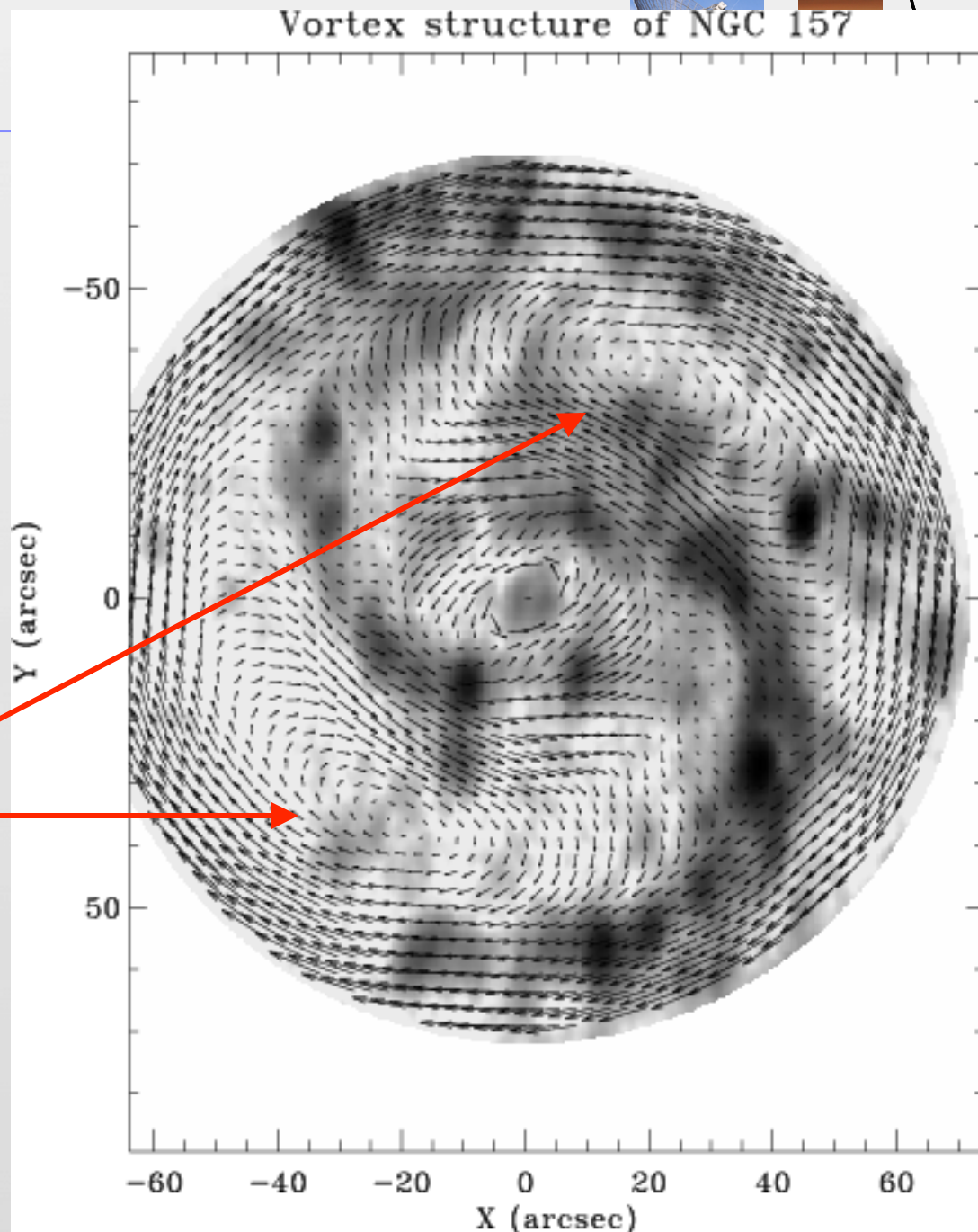
...mais aussi dans les  
disques galactiques

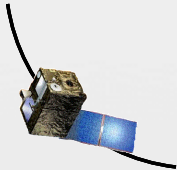
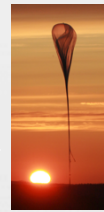
couplage spirale/Rossby

↔ effet Landau sur les  
étoiles en corotation

2 tourbillons  
associés à l'onde  
spirale

*Fridman et al.*





Relation de dispersion :

$$\omega = \frac{k_y L'}{k_x^2 + k_y^2}$$

y = longitude  
x = latitude

$L'$  = gradient en latitude de la vorticité spécifique :

$$\frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{\Sigma}$$

ou en MHD de :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} \frac{\Sigma}{B^2}$$

$\Sigma$  = densité de surface

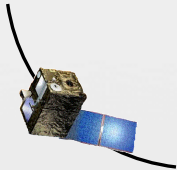
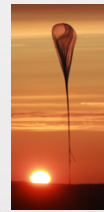
Petites échelles spatiales = grandes échelles temporelles (et vice-versa)

Un seul sens de propagation permis

... quoique  $v_{\text{phase}}$  et  $v_{\text{groupe}}$  soient de signe opposé !

Ondes de Rossby = perturbations de vorticité  
qui se propagent dans un gradient de vorticité

# Fluide sans rotation : ondes sonores et tourbillons



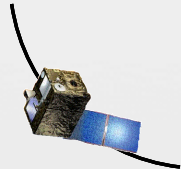
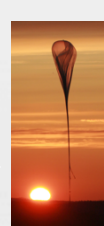
- Planète : rotation solide ( $\Omega = \text{Cte}$ )  
et **gradient de vorticité** (latitude)  
-> ondes sonores et ondes de Rossby
- disque d'accrétion : rotation différentielle ( $\Omega = \Omega(r)$ )  
-> **ondes de densité** = ondes sonores,  
de forme **spirale** à cause de la **rotation différentielle**  
... mais aussi gradient de vorticité :  
$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\vartheta) = \frac{\kappa^2}{2\Omega}$$
  
-> aussi des **ondes de Rossby**

Difficulté supplémentaire : la rotation différentielle  
couple les deux types d'ondes :

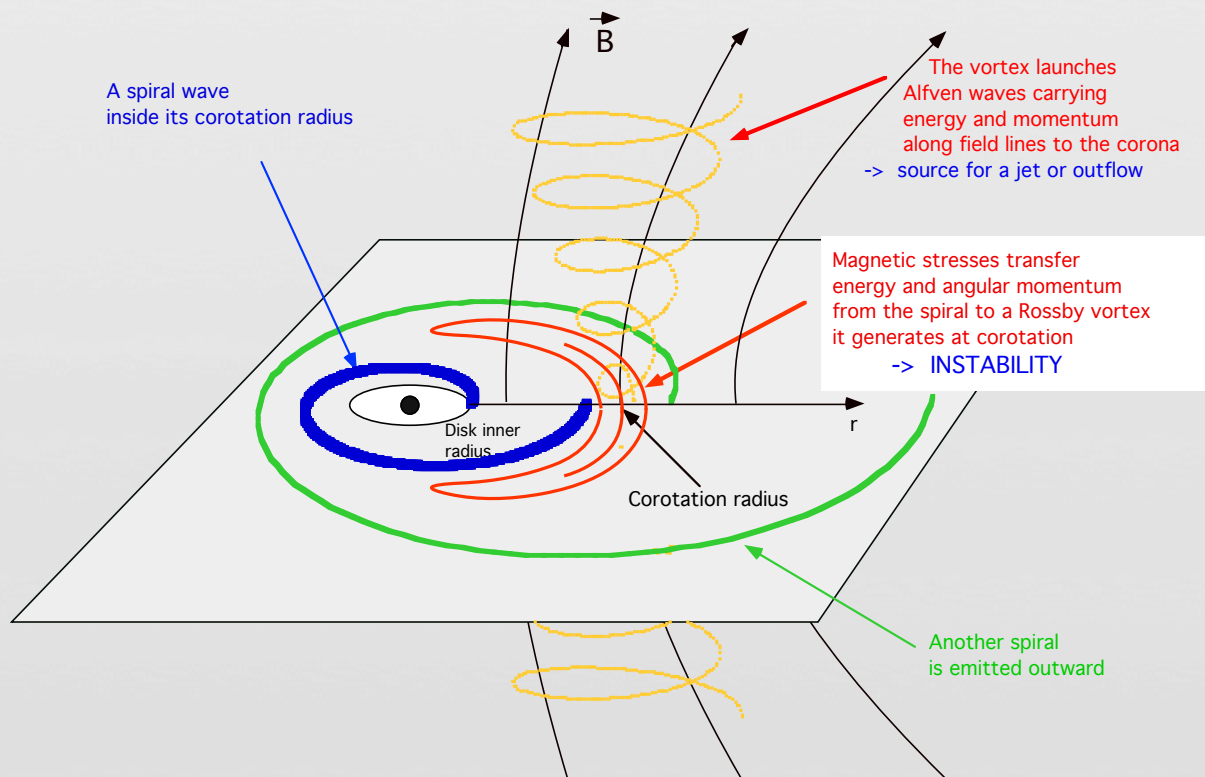
**Une onde spirale perturbe la vorticité,**  
**une onde de Rossby perturbe la densité**



# exemple d'amplification : l'AEI (instabilité d'accrétion-éjection)



dans un disque traversé par un champ magnétique vertical (pourquoi ?)  
~équipartition ( $\beta \sim 1$ )

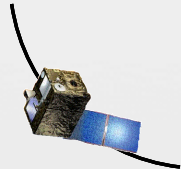
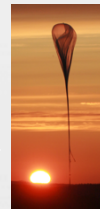


La rotation différentielle couple des ondes d'énergie positive et négative dans le disque ; le champ magnétique augmente fortement ce couplage puis lance des ondes de Rossby-Alfvén qui emportent une partie de l'énergie dans la couronne

(si le gradient de vorticité spécifique est dans le bon sens)  
(si réflexion des ondes au bord interne du disque)



# autre exemple : RWI (Rossby Wave Instability)

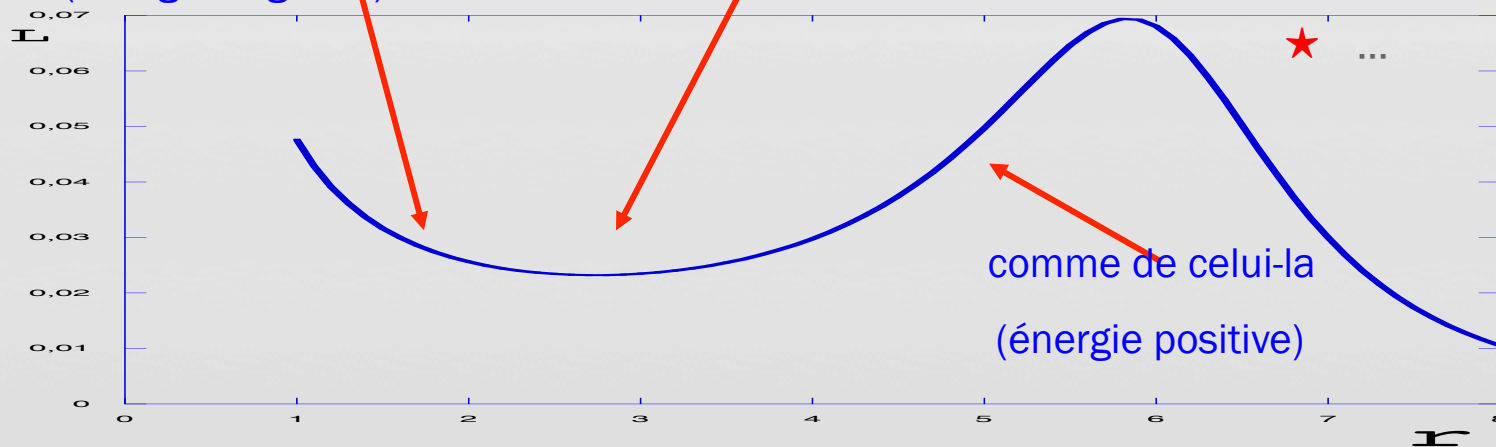


Mode **localisé** dans un extremum de vorticité spécifique

Une même onde de Rossby dont la corotation est ici

peut se propager de ce côté-ci

(énergie négative)

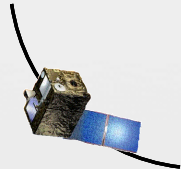
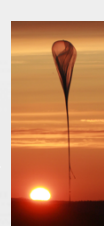


- ★ Lovelace & Hohlfield, 1979, puis Lovelace, Li, Colgate, 1999
- ★ Sellwood et Kahn
- ★ Papaloizou
- ★ Dubrulle & Zahn
- ★ ...

le champ magnétique aide mais **n'est pas indispensable**

pas d'autre condition (frontières, B...) que l'extremum de vorticité spécifique))

# autre exemple : RWI (Rossby Wave Instability)



le champ magnétique aide mais **n'est pas indispensable**

An extremum of  $\mathcal{L}_B = \frac{\kappa^2}{2\Omega} \frac{\Sigma}{B^2}$

Spiral density waves  
are emitted inward  
and outward

The Rossby vortices send their energy and  
momentum along field lines as Alfvén waves

-> source of jet or flow

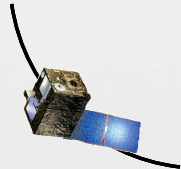
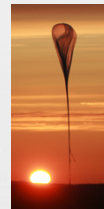
A mode formed of Rossby waves of positive  
and negative energy,  
trapped near the extremum  
and amplified by exchanging energy

- ★ Lovelace & Hohlfield, 1979, puis Lovelace, Li, Colgate, 1999
- ★ Sellwood et Kahn
- ★ Papaloizou
- ★ Dubrulle & Zahn
- ★ ...

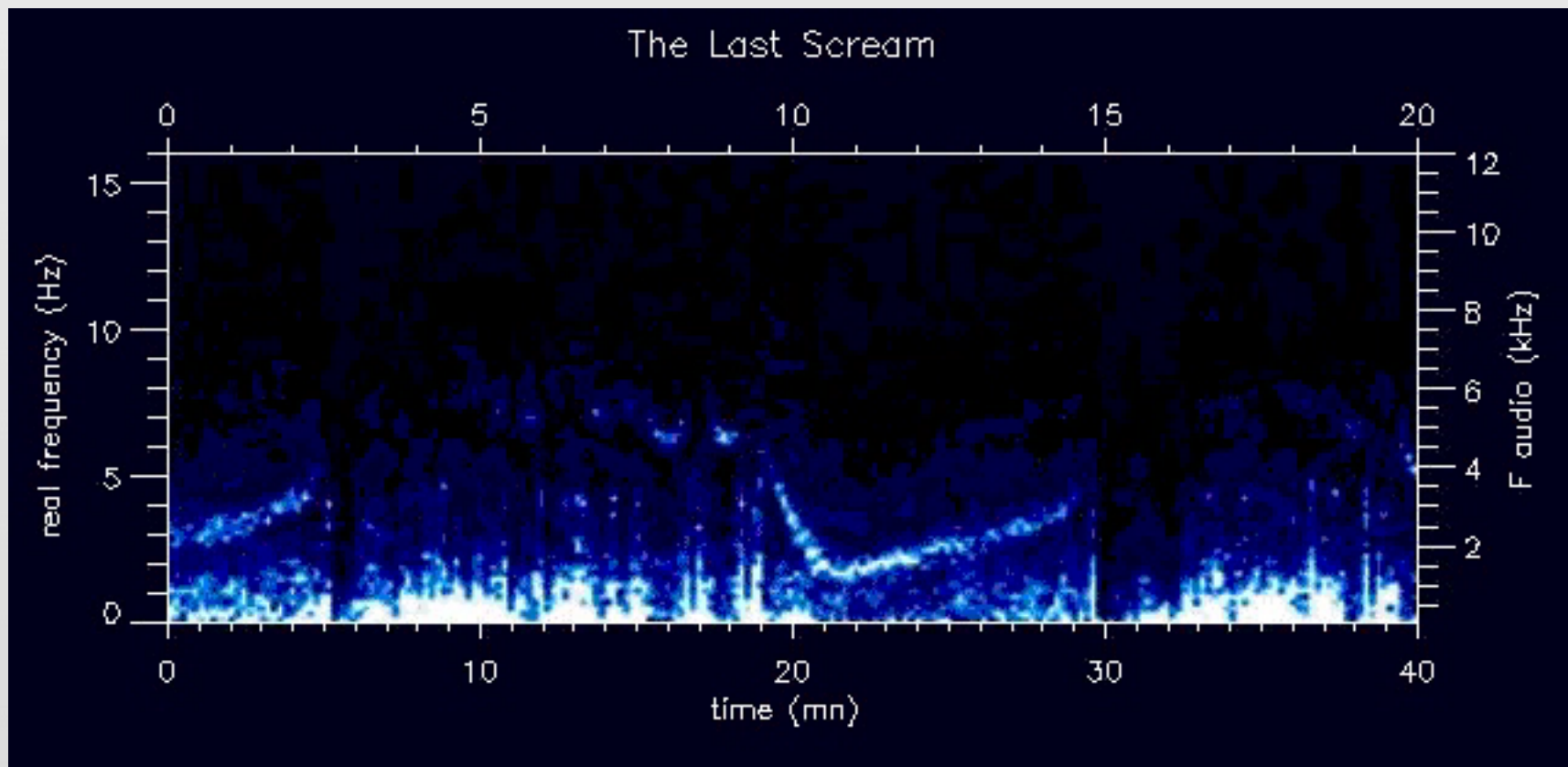
Mode **localisé** dans un  
extremum de vorticité  
spécifique

pas d'autre condition (frontières, B...) que l'extremum de vorticité spécifique))

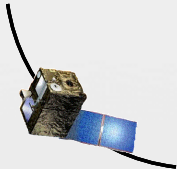
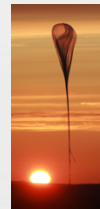
# quelques applications :



- AEI : instabilité dans la région centrale d'un disque
  - en particulier : Oscillation Quasi-Périodique (QPO) de basse fréquence dans les disques de trous noirs accrétants dans l'état spectral « low-hard »
  - -> modèle de « crues magnétiques » pour GRS1915+105



# quelques applications :

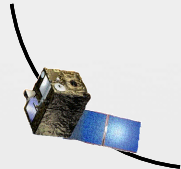
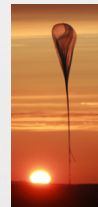


- RWI : deux façons de créer un extremum de vorticité spécifique

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa^2}{2\Omega\Sigma}$$

- par un extremum de densité : accumulation de matière (ou saut d'entropie ?)
  - les bords de la « dead zone »
  - les bords du sillon d'une planète dans le disque
- par un extremum de vorticité : bord interne (dernière orbite stable, ISCO :  $\kappa = 0$ ) du disque d'un trou noir accrétant
  - -> Oscillation Quasi-Périodique de Haute Fréquence
  - flares du Centre Galactique

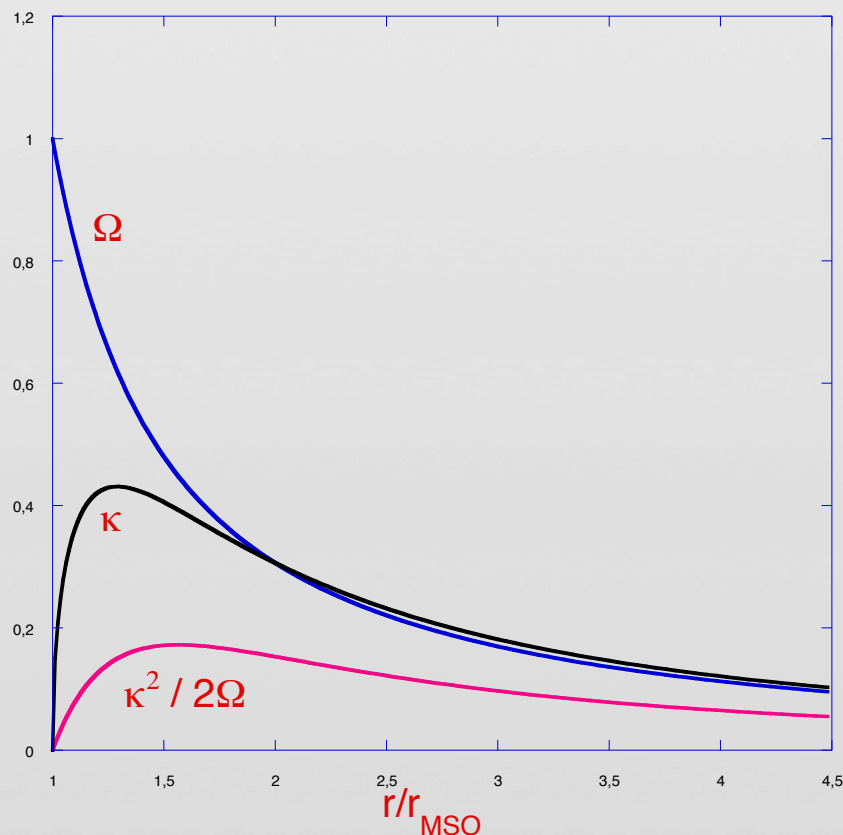
# Dernière orbite stable autour d'un trou noir



Rayon où  $\kappa$  s'annule (disque keplerien :  $\kappa = \Omega$ )

En-deçà de ce rayon :  $\kappa$  imaginaire  $\rightarrow$  chute rapide vers le TN

à  $3 r_S = 6 \frac{GM}{c^2}$  pour un TN de Schwarzschild



la courbe de rotation relativiste peut être représentée qualitativement en utilisant un potentiel pseudo-newtonien :

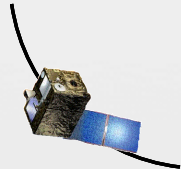
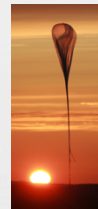
$$\Phi = \frac{GM}{r - r_G}$$

Nowack et Wagoner  $\rightarrow$  'discosismologie' : possibilité de modes localisés dans l'extremum relativiste de  $\kappa^2/2\Omega$  (modes de gravité)

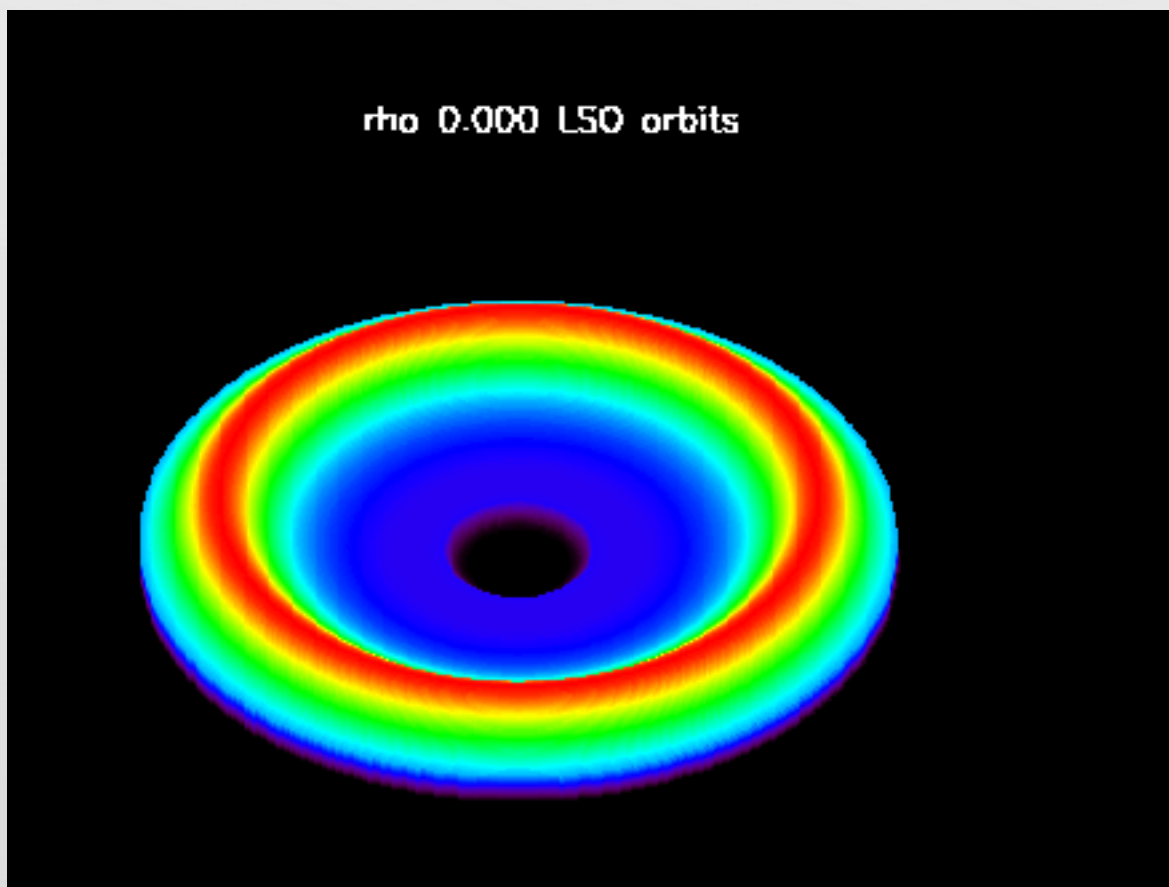
$\rightarrow$  version relativiste de la RWI (sans le savoir...)

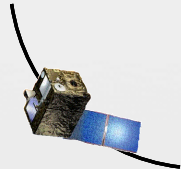
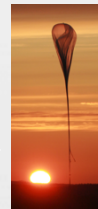
et surtout : **instabilité !**



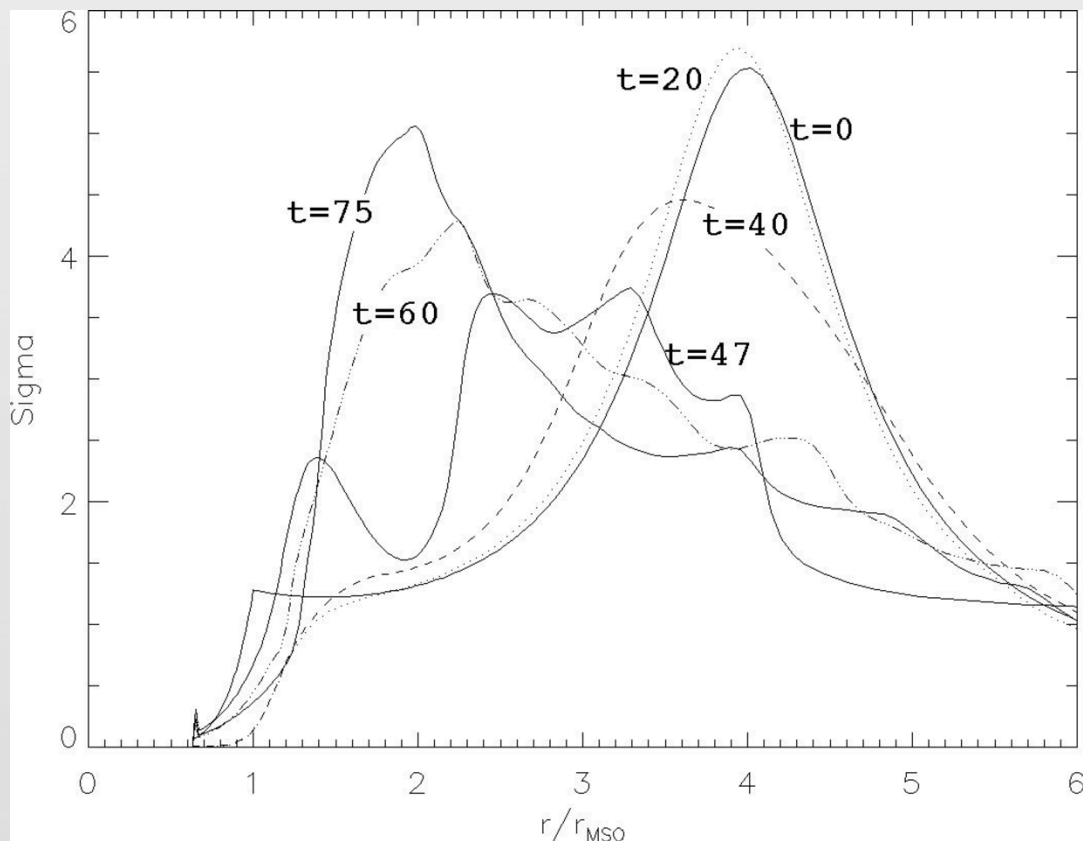


RWI due à un extremum de densité  
cas du Centre Galactique : un « blob » (comète ?) capturé et  
sublimé dans le disque

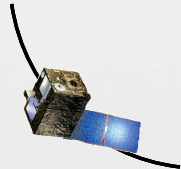
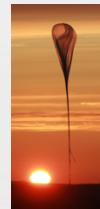




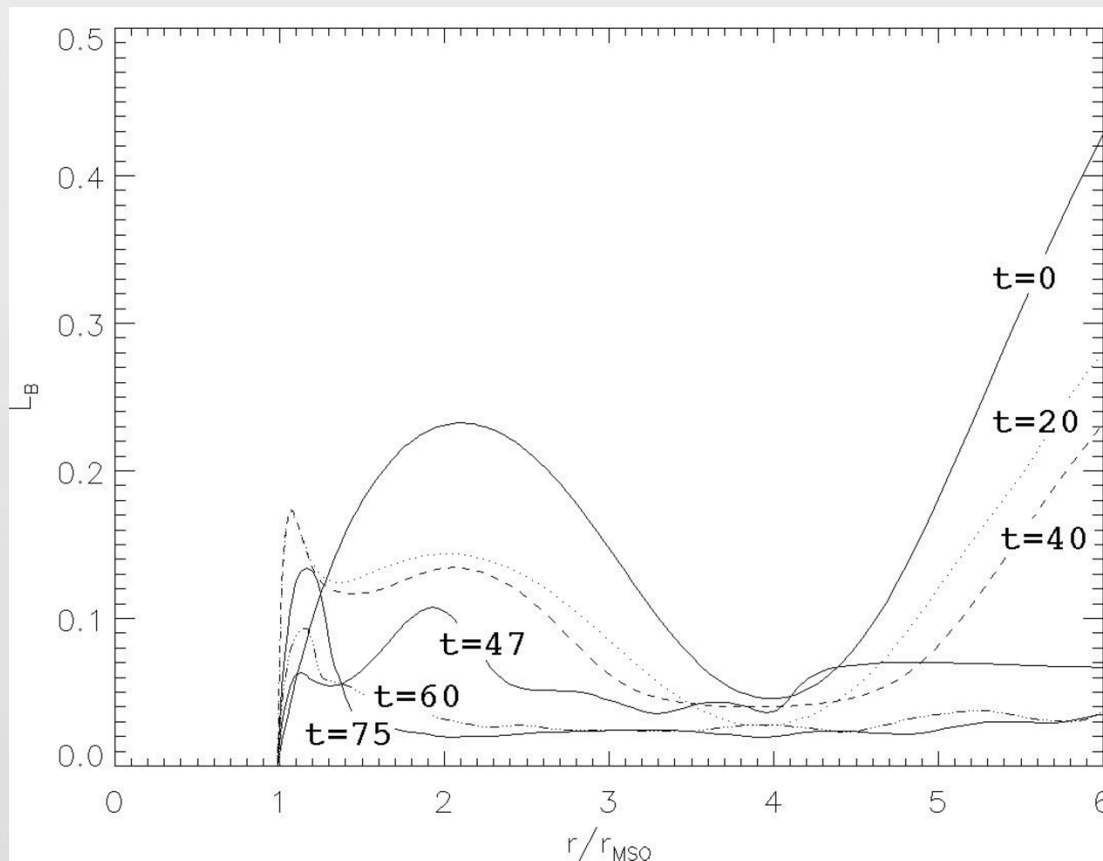
évolution du profil de densité :



Une instabilité violente fait tomber le gaz vers le trou noir en quelques dizaines de temps de rotation

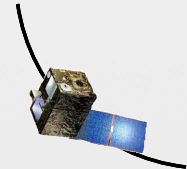


évolution du profil de  $L_B$ :



Résultat final : le profil de  $L_B$  devient plat  
(confirme que c'est bien le paramètre qui contrôle l'instabilité)

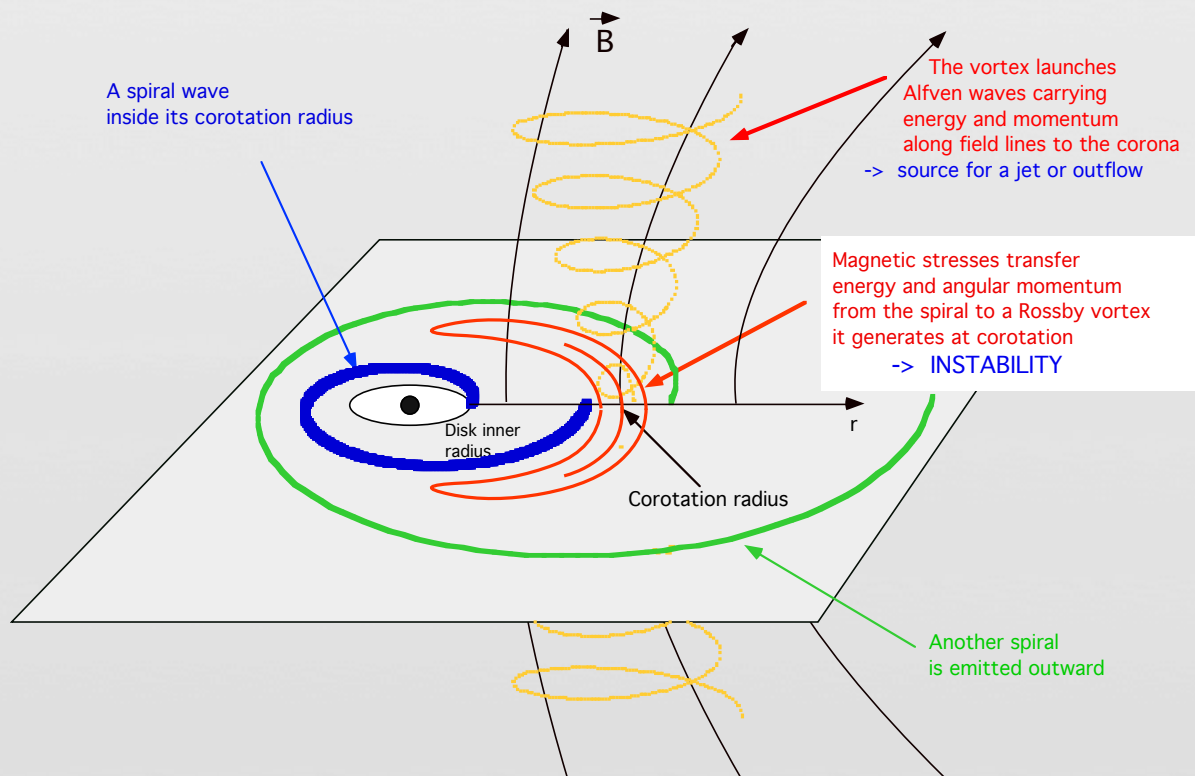
# le mécanisme d'éjection



à ce stade  
uniquement calcul  
analytique

- Ondes de Rossby-Alfvén
- estimation de l'efficacité du couplage

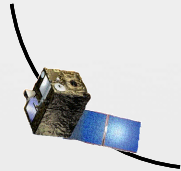
un outil dramatique :  
Forme variationnelle  
(principe de moindre action)



La spirale extrait de l'énergie et du moment cinétique du disque

Elle les transfère au tourbillon de Rossby (-> amplification)

l'onde de Rossby se convertit en Rossby-Alfvén le long des lignes de champ



$$\begin{aligned}
 & \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} ds \left\{ r^2(s) \left[ c_S^2 h^* \sigma + 2\Phi_M^*(s) B_z^D(s) \right] \right. \\
 & - \frac{2B_0 c_S^2}{L} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial s} h^* \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} \Phi_M \right) + \left( \frac{\partial}{\partial s} \Phi_M^* \right) \left( \frac{\partial}{\partial s} h \right) \right] \\
 & - \frac{1}{L} \left[ \frac{4}{\Sigma c_S^2} \left| \frac{\partial}{\partial s} h \right|^2 + \frac{B_0^2}{4 \Sigma} \left| \frac{\partial}{\partial s} \Phi_M \right|^2 \right] \\
 & - \frac{2B_0 c_S^2}{L^2} \left[ h^* \Phi_M + h \Phi_M^* \right] \left\{ m^2 (L + 4\Omega\Omega') \right. \\
 & \quad \left. + 2m\Omega \left[ \tilde{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \ln(\Omega B_0) + 2 \frac{\Omega W}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial s} \ln \left( \frac{W}{B_0} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{\Sigma}{L^2} c_S^4 |h|^2 \left\{ m^2 (L + 4\Omega\Omega') \right. \\
 & \quad \left. + 2m\Omega \left[ \tilde{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \ln(\Omega \Sigma) + 2 \frac{\Omega W}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial s} \ln \left( \frac{W}{\Sigma} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{4B_0^2}{\Sigma L^2} |\Phi_M|^2 \left\{ m^2 (L + 4\Omega\Omega') \right. \\
 & \quad \left. + 2m\Omega \left[ \tilde{\omega} \frac{\partial}{\partial s} \ln \left( \frac{\Omega B_0^2}{\Sigma} \right) + 2 \frac{\Omega W}{\tilde{\omega}} \frac{\partial}{\partial s} \ln \left( \frac{W \Sigma}{B_0^2} \right) \right] \right\} \\
 & \left. = - \left[ \frac{2B_0 c_S^2}{L} \left( h^* \frac{\partial}{\partial s} \Phi_M + \Phi_M^* \frac{\partial}{\partial s} h \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\Sigma}{L} c_S^4 h^* \frac{\partial}{\partial s} h + \frac{4B_0^2}{\Sigma L} \Phi_M^* \frac{\partial}{\partial s} \Phi_M \right] \right\}_{s_{\min}}^{s_{\max}}
 \end{aligned}$$

Boundary terms  
= outgoing spiral

Poles = corotation resonance  
Vanishing denominators ~ Landau

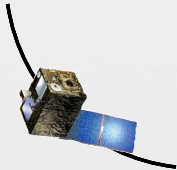
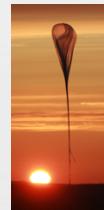
terms in black : hermitian contributions  
= propagation of the wave (conservation of energy)

Terms in red :

imaginary contributions = sinks or sources of energy

-> amplification or damping





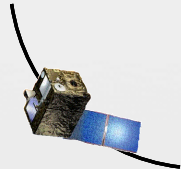
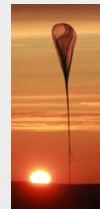
$$\int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \left\{ \frac{\tilde{\omega}^2}{V_A^2} (|\tilde{\nabla}_{\perp} \Psi|^2 - |\tilde{\nabla}_{\perp} \Phi|^2) + 2 \frac{\Omega \Omega'}{V_A^2} |\partial_s \Phi|^2 + 2m \partial_s \left( \frac{\tilde{\omega} \Omega}{V_A^2} \right) |\Phi|^2 - 2m \tilde{\omega} \partial_s \left( \frac{\Omega}{V_A^2} \right) |\Psi|^2 - \Phi^* \tilde{\nabla}_{\perp}^2 \nabla^2 \Phi \right\} ds dz$$

$$= - \left[ \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{dz}{V_A^2} \left( \tilde{\omega}^2 \Phi^* \tilde{\nabla}_{\perp} \Phi - 2 \Omega \Omega' \Phi^* \partial_s \Phi - \tilde{\omega}^2 \Psi \tilde{\nabla}_{\perp} \Psi^* + 2im \Omega \Omega' \Phi^* \Psi - 2i \tilde{\omega} \Omega (\Psi \tilde{\nabla}_{\perp} \Phi^* + \Phi^* \tilde{\nabla}_{\perp} \Psi) \right) \right]_{s_{\min}}^{s_{\max}}$$

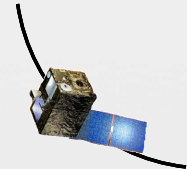
$$+ \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left[ \Psi^* \partial_z \tilde{\nabla}_{\perp}^2 \Psi \right]_{-z_{\max}}^{z_{\max}} ds.$$

énergie sortant radialement

énergie sortant verticalement



- équation unique présentant les 3 termes d'énergie :
    - Onde spirale sortant **radialement**
    - Onde de Rossby **dans le disque**
    - Onde de Rossby-Alfvén envoyée **vers la couronne**  
- > jets, vents ?
  - formalisme puissant qui permet d'estimer le rapport entre ces termes
  - ... sans vraiment résoudre à 3D !
-



- estimation à partir de la forme variationnelle :  
L'onde de Rossby-Alfvén emporte vers la couronne une fraction

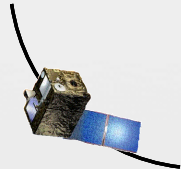
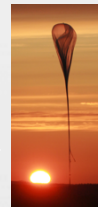
$$\sim \left( \frac{\rho_{\text{couronne}}}{\rho_{\text{disque}}} \right)^{1/2} \left( \frac{r}{h} \right)^{3/2}$$

petit  
(freinage magnétique)

grand !!

Efficacité liée au couplage résonant  
à la corotation

de l'énergie d'accrétion



à suivre !!

---